SEL0417 - Fundamentos de Controle

Continuação: Autovalores e Autovetores

Cálculo dos Autovalores e Autovetores

- A partir da transformação linear:

$$Av = \lambda v$$

podemos encontrar os autovalores de forma direta. Dessa forma, desenvolvendo:

$$\lambda v - Av = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)v = 0$$

Cálculo dos Autovalores e Autovetores

- A partir disso, o seguinte procedimento deve ser adotado:

1) Calcular o polinômio característico da matriz A;

$$\mathrm{p}(s) = \det(s\mathrm{I} - A)$$

2) Calcular as raízes do polinômio característico;

$$\mathrm{p}(\lambda_\mathrm{i}) = \det(\lambda_\mathrm{i}\mathrm{I} - \mathrm{A}) = 0, \text{ tal que } \lambda_\mathrm{i}, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}$$

3) Montar o sistema linear;

$$(\lambda_\mathrm{i}\mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{v}_\mathrm{i} = 0$$

Cálculo dos Autovalores e Autovetores

- A partir disso, o seguinte procedimento deve ser adotado:

4) Encontrar:

$$v_i, i = 1, \dots, n \Rightarrow (\lambda_i I - A)v_i = 0$$

Sendo que,

$\lambda_i, i = 1, \dots, n$ são os autovalores da matriz A; e

$v_i, i = 1, \dots, n$ são os respectivos autovetores associados.

Cálculo dos Autovalores e Autovetores

Nota 1: Para o cálculo de $\mathrm{v_i}$, é necessário escolher um valor para pelo menos uma de suas componentes, pois a matriz $\lambda_{\mathrm{i}}\mathrm{I} - A$ não possui posto completo.

Nota 2: O posto de uma matriz quadrada é dado pelo número de linhas (ou colunas) linearmente independentes que ela possui. Assim, uma matriz de posto completo é aquela que possui o maior posto possível. No caso de uma matriz nxn, seu posto terá valor máximo de n.

Exemplo 1

- Seja a matriz:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad (\mathrm{A} - \mathrm{sI}) = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{s} & 1 \\ 0 & -1 - \mathrm{s} \end{bmatrix}$$

Realizando o procedimento explicado,

1) $\det(A - sI) = (1 - s)(-1 - s) = -1 + s^2$

2) $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

Exemplo 1

3) $(A - \lambda_i)v_i = 0$

4) Encontrando v_1, que é autovetor associado a λ_1:

$$(\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{I})\mathrm{v}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{11} \\ \mathrm{v}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{11} \\ \mathrm{v}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0\mathrm{v}_{11} + \mathrm{v}_{12} = 0 \\ 0\mathrm{v}_{11} - 2\mathrm{v}_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{v}_{11} = \text{qualquer } (\text{p. ex}, \mathrm{v}_{11} = 1) \\ \mathrm{v}_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

4) Encontrando v_2, que é autovetor associado a λ_2:

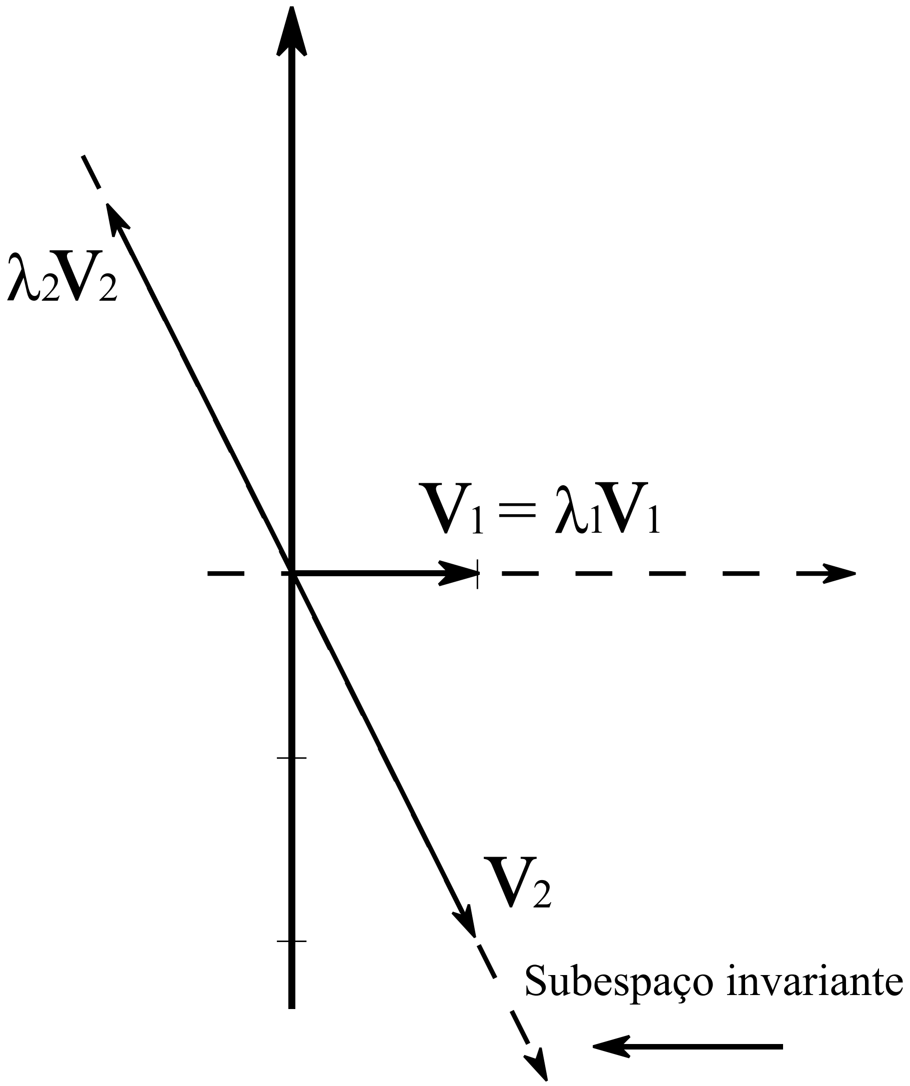
$$(A - \lambda_2 I)\mathrm{v}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 0 & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{21} \\ \mathrm{v}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{11} \\ \mathrm{v}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\mathrm{v}_{11} + 1\mathrm{v}_{12} = 0 \\ 0\mathrm{v}_{11} + 0\mathrm{v}_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{v}_{21} = \text{qualquer (p. ex, } \mathrm{v}_{21} = 1) \\ \mathrm{v}_{22} = -2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

- Interpretação geométrica



Exemplo 2

- Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad (A - sI) = \begin{bmatrix} -1 - s & -1 \\ 1 & -1 - s \end{bmatrix}$$

Realizando o procedimento explicado,

1) $\det(A - sI) = (-1 - s)(-1 - s) - 1(-1) = s^2 + 2s + 2$

2) $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + i \\ \lambda_2 = -1 - i \end{cases}$

Exemplo 2

3) $(A - \lambda_i)v_i = 0$

4) Encontrando v_1, que é autovetor associado a λ_1:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+1-i & -1 \\ 1 & -1+1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (2-i)v_{11} - 1v_{12} = 0 \\ 1v_{11} - iv_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{11} = \text{qualquer}\ (\text{p. ex}, v_{11} = 1) \\ v_{12} = -i \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

4) Encontrando v_2, que é autovetor associado a λ_2:

$$(\mathrm{A}-\lambda_2\mathrm{I})\mathrm{v}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+1+\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -1+1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{21} \\ \mathrm{v}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} & -1 \\ 1 & +\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{21} \\ \mathrm{v}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (2+\mathrm{i})\mathrm{v}_{21} - 1\mathrm{v}_{22} = 0 \\ 1\mathrm{v}_{21} + \mathrm{i}\mathrm{v}_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{v}_{21} = \text{qualquer } (\text{p. ex}, \mathrm{v}_{21} = 1) \\ \mathrm{v}_{22} = \mathrm{i} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistema Linear

- Seja o sistema:

$$\mathrm{Mx} = \mathrm{b}$$

Considere o caso particular em que $\mathrm{b} = 0$. Se existe M^{-1}, então:

$$\mathrm{Mx} = 0 \Rightarrow \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Mx} = \mathrm{M}^{-1}0 \Rightarrow \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Mx} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Nesse caso, a única solução possível é $\mathrm{x} = 0$.

Resolução de Sistema Linear

- Agora considere a relação:

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Para que não seja possível apenas a solução trivial $(v = 0)$, a matriz $(\lambda I - A)$ não pode ter inversa. Com isso, o sistema admite infinitas soluções.

- Ainda, considere uma perturbação $\Delta\lambda$, de maneira que a matriz fique igual a $[(\lambda + \Delta\lambda)I - A]$. Dessa forma, quando $\Delta\lambda \to 0$, a inversa da matriz tenderá a infinito.

Resolução de Sistema Linear

- Como a função de transferência do sistema é igual a:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

nota-se que os autovalores da matriz A são os polos da função de transferência do sistema dinâmico.