SEL0417 - Fundamentos de Controle

Diagrama de Blocos

Diagrama de Blocos

- O diagrama representa a equação: $Y(s) = G(s)U(s)$;
- O diagrama fornece uma representação esquemática do sistema dinâmico no domínio da frequência.

Exemplo 1:

- Seja o sistema:

$$\dot{x} = -x + u \Rightarrow sX(s) = -X(s) + U(s) \qquad \text{(a)}$$

$$y = x \qquad \Rightarrow \quad Y(s) = X(s) \qquad \text{(b)}$$

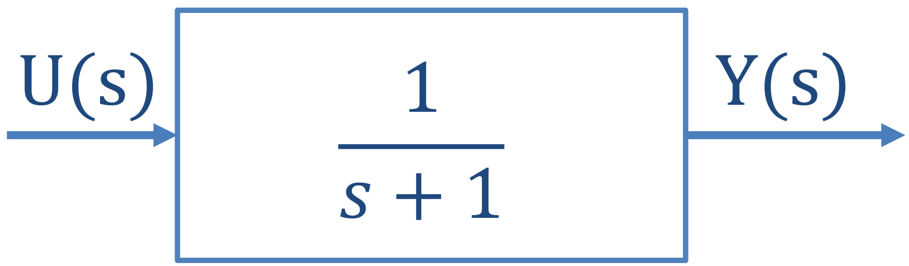
Substituindo (b) em (a):

$$sY(s) = -Y(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$$

Exemplo 1

- Assim, tem-se o seguinte diagrama de blocos do sistema:



Exemplo 2

- Encontrando o diagrama de blocos do pêndulo simples:

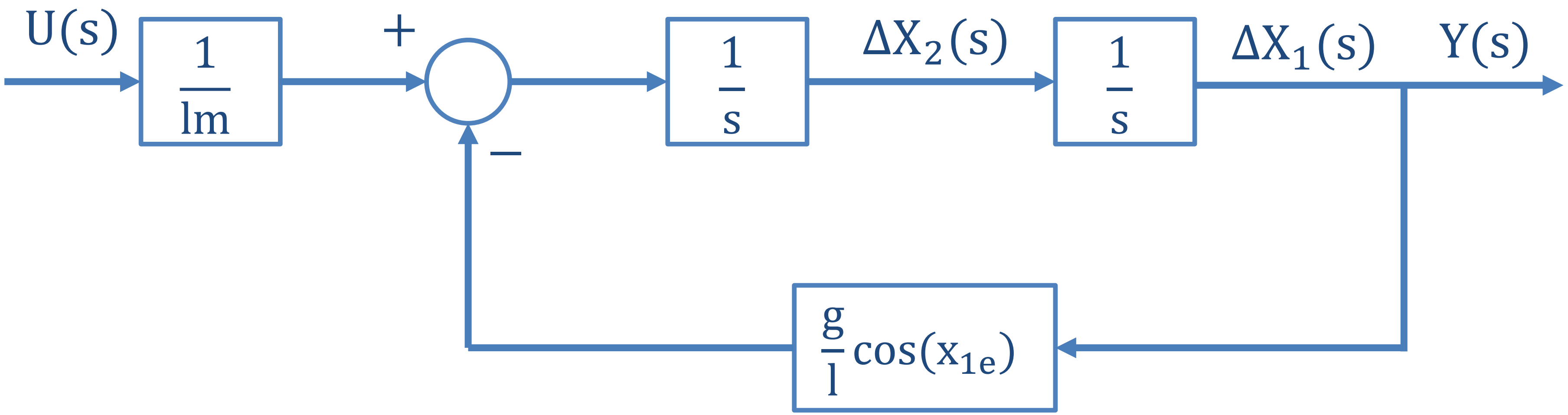
$$\Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \Delta X_1(s) = \frac{\Delta X_2(s)}{s}$$

$$\Delta\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\cos(x_{1e})\,\Delta x_1 + \frac{1}{lm}\Delta u \Rightarrow \Delta X_2(s) = \frac{1}{s}[-\frac{g}{l}\cos(x_{1e})\,\Delta X_1(s) + \frac{1}{lm}\Delta U(s)]$$

$$\Delta y = \Delta x_1 \Rightarrow \Delta Y(s) = \Delta X_1(s)$$

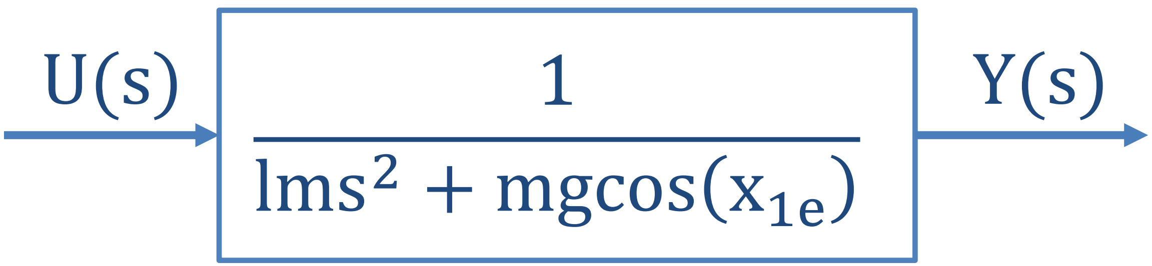
Exemplo 2

- Montando o diagrama de blocos, temos:



Exemplo 2

- O diagrama equivalente é, portanto:

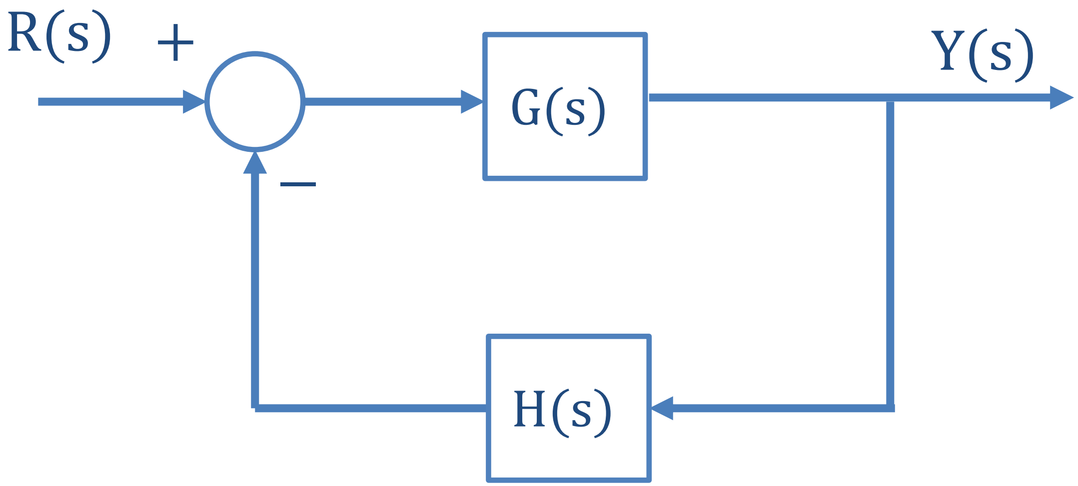


lembrando que a FT do pêndulo simples é:

$$G(s) = \frac{1}{lms^2 + mgcos(x_{1e})}$$

Problema de rastreamento

- Regra geral:



- A FT ($G_{MF}(s)$) desse sistema será:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Parte 2

Definição de Autovetores e Autovalores

Soluções de equações de estado

- Seja:

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0$$

- Como a solução desse sistema pode ser encontrada?
- Inicialmente, considere $A \in \mathbb{R}$, ou seja, $A = a$. Assim, temos:

$$\dot{x} = ax$$

- A solução desse sistema é:

$$x(t) = x_0 e^{at} \qquad (1)$$

Soluções de equações de estado

- Para provar que (1) é solução do sistema genérico $\dot{x} = ax$, basta encontrar a derivada de x(t).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(x_0 e^{at})}{dt} = a\underbrace{x_0 e^{at}}_{x(t)} = ax(t)$$

- Agora, qual a solução para o caso de $A \in \mathbb{R}^{nxn}$?

Soluções de equações de estado

- Neste caso, a solução de $\dot{x} = Ax$ é igual a:

$$x(t) = x_0 e^{At}$$

- Mas o que significa e^{At}?
- Expandindo por série de Taylor, temos que:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

Soluções de equações de estado

- Para provar que $x(t) = x_0 e^{At}$ é a solução do sistema de equações de estado na forma matricial, basta derivar a série de Taylor encontrada.

$$\frac{de^{At}}{dt} = \frac{d\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right]}{dt} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d\left[I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right]}{dt} = \frac{d\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right]}{dt} \Longrightarrow$$

Soluções de equações de estado

- Para provar que $x(t) = x_0 e^{At}$ é a solução do sistema de equações de estado na forma matricial, basta derivar a série de Taylor encontrada.

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} t^{k-1} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k-1)!} t^{k-1} A^k \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1}$$

Soluções de equações de estado

- Para provar que $x(t) = x_0 e^{At}$ é a solução do sistema de equações de estado na forma matricial, basta derivar a série de Taylor encontrada.
- Realizando uma mudança de variável, onde $\mathrm{h} = \mathrm{k} - 1$, temos então:

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{At}}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{A} \overbrace{\sum_{\mathrm{h}=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{h}!} \mathrm{t}^{\mathrm{h}} \mathrm{A}^{\mathrm{h}}}^{\mathrm{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}}} = \mathrm{Ax}(\mathrm{t})$$

Soluções de equações de estado

- Portanto, $\mathrm{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{x}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{At}}$ é a solução de $\dot{\mathrm{x}} = A\mathrm{x}$.
- O cálculo de $e^{\lambda t}$ envolve o cálculo de um série infinita.
- Alternativa: Caracterização da resposta através dos autovalores e autovetores da matriz A.

Definição de Autovalores e Autovetores

- Seja,

$$A \in \mathbb{R}^{nxn}$$

- Se:

a) λ é autovalor de A; e

b) v é autovetor de A associado a λ.

Então,

$$\lambda v = Av$$

Definição de Autovalores e Autovetores

- Interpretação geométrica:

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n | y = f(x)$$

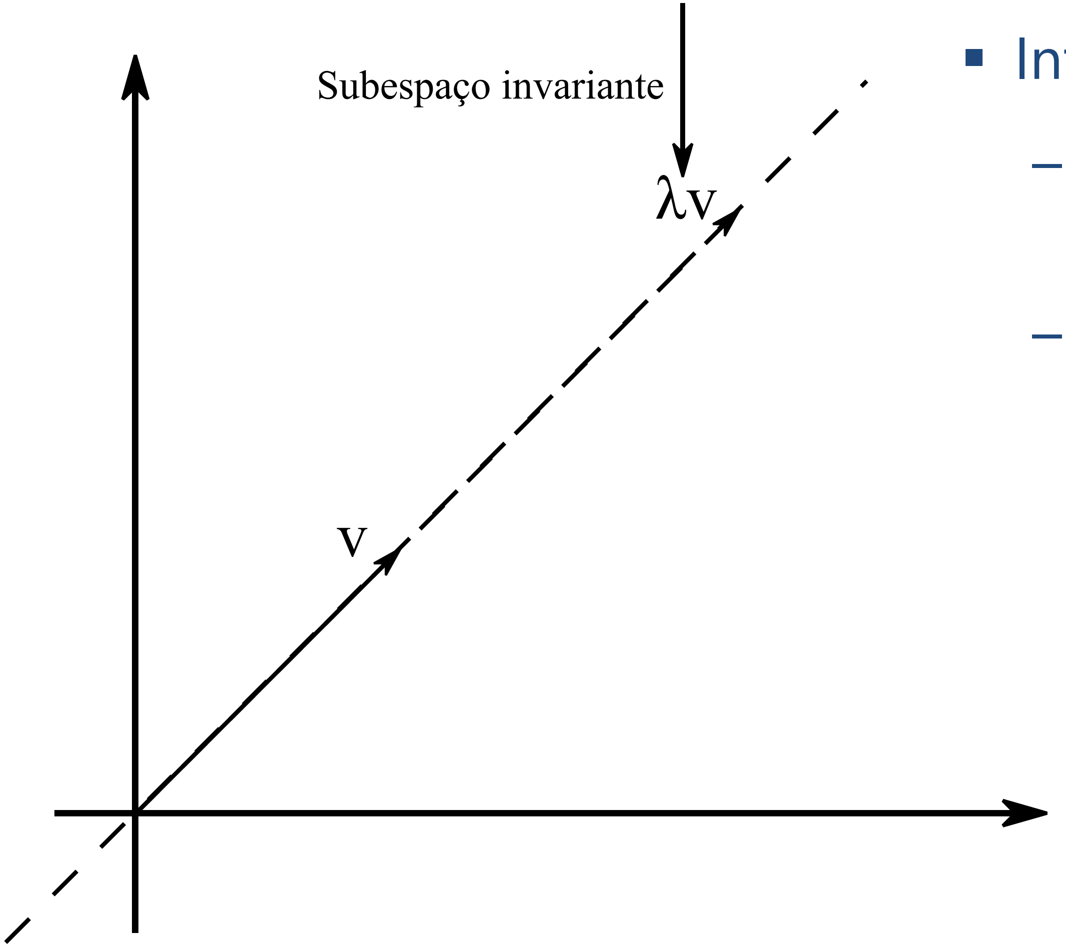
- Se $f(x)$ é linear, pode ser representada da seguinte forma:

$$y = Ax$$

- Escolhendo $x = v$ (autovetor de A associado a λ):

$$Av = \lambda v$$

Definição de Autovalores e Autovetores



- Interpretação geométrica:
  - A direção de v não se altera com a transformação linear; e
  - A direção de é um subespaço invariante pela transformação A.