SEL0417 - Fundamentos de Controle

Solução de uma Equação de Estado

Solução de uma Equação de Estado

- Seja o sistema:

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0$$

A expressão:

$$x_i(t) = c_i v_i e^{\lambda_i t} \quad (1)$$

é solução do sistema se e somente se λ_i é autovalor de A com autovetor associado v_i.

Solução de uma Equação de Estado

- Para provar isso, primeiro considere que λ_i é autovalor de A com seu respectivo autovetor v_i. Assim, tem-se:

$$\mathrm{x_i = c_i v_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow \dot{x}_i = c_i v_i \lambda_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow x_i = c_i(\lambda_i v_i) e^{\lambda_i t}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathrm{\dot{x}_i = c_i(Av_i)e^{\lambda_i t} \Rightarrow \dot{x}_i = A\left(c_i v_i e_i^{\lambda t}\right)} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{\dot{x}_i = Ax_i}$$

- Dessa forma, (1) é solução do sistema se λ_i é autovalor de A com seu respectivo autovetor v_i.

Solução de uma Equação de Estado

- Como (1) é solução do sistema se e somente se λ_i é autovalor de A com autovetor associado v_i, para finalizar a prova, deve-se substituir (1) na equação $\dot{x} = Ax$.

$$\frac{d\left(c_i v_i e^{\lambda_i t}\right)}{dt} = A\left(c_i v_i e^{\lambda_i t}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cancel{c_i} v_i \lambda_i \cancel{e^{\lambda_i t}} = A\left(\cancel{c_i} v_i \cancel{e^{\lambda_i t}}\right) \Longrightarrow$$

$$\lambda_i v_i = A v_i$$

- Portanto, se (1) é solução do sistema, λ_i é autovalor de A com seu respectivo autovetor v_i.

Solução de uma Equação de Estado

- Qual a vantagem de expressar a solução do sistema dessa forma?
- Assim, é possível caracterizar a resposta do sistema de uma maneira alternativa.
- A reposta completa de $\dot{x} = Ax$ será:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t} \qquad (2)$$

Exemplo 1

- Considere o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

seus autovalores, com respectivos autovetores, são:

$\lambda_1 = 1, v_1 = [1 \quad 0]$ e $\lambda_2 = -1, v_2 = [1 \quad -2]$

Além disso, sua condição inicial é $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Pela expressão (2), a resposta do sistema é dada por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{1t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-1t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

- Primeiro, deve-se determinar as constantes c_1 e c_2 que compõem a resposta do sistema. No caso desse exemplo, isso é possível ao substituir os valores de x_1 e x_2 no instante $t = 0\ s$.

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = c_1 e^{1\cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-1\cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ -2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -2c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 1$$

Exemplo 1

- Assim, a resposta completa do sistema do exemplo 1 é:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Interpretação geométrica:

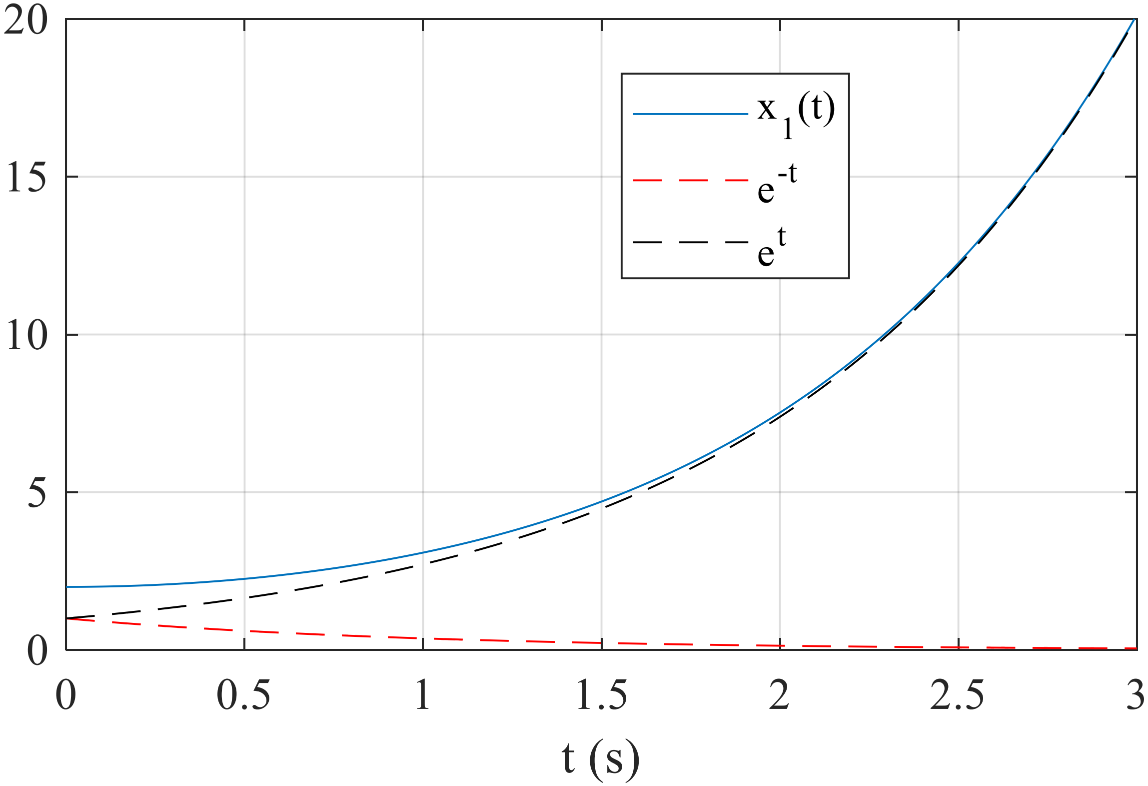
λ_i - modo de resposta do sistema;

v_i - distribuição do modo entre as variáveis de estado.

$$x_1(t) = e^{t} + e^{-t}$$

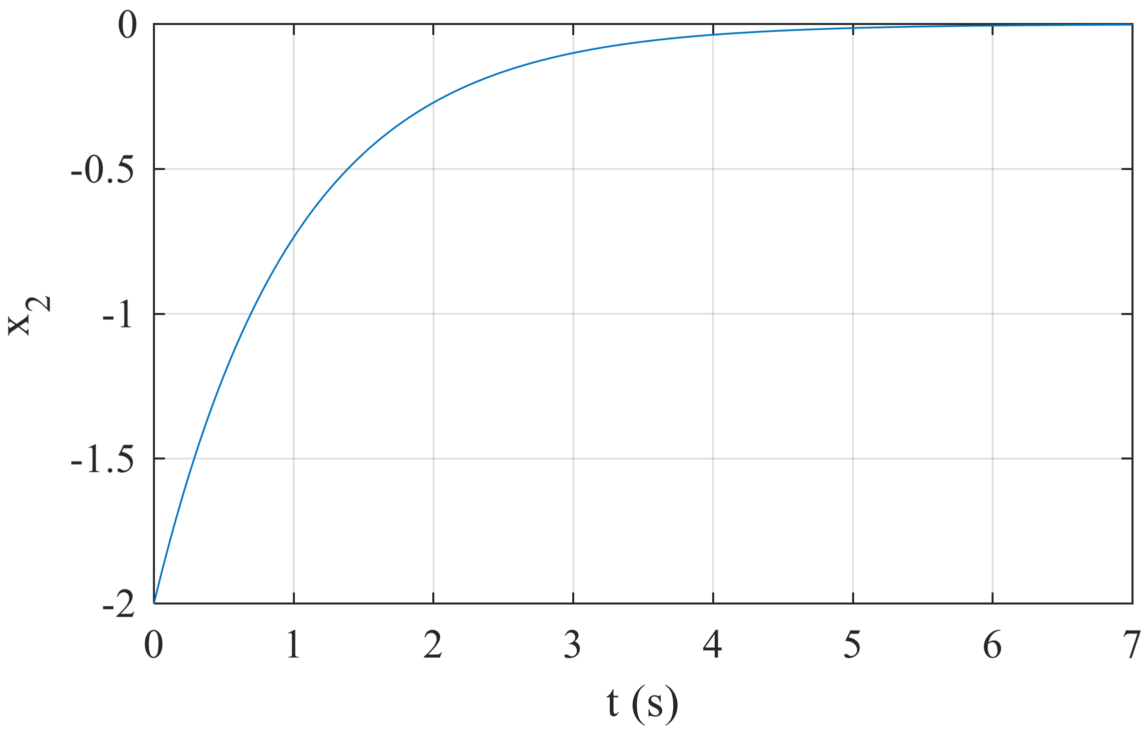
$$x_2(t) = -2e^{-t}$$

Exemplo 1: Interpretação gráfica



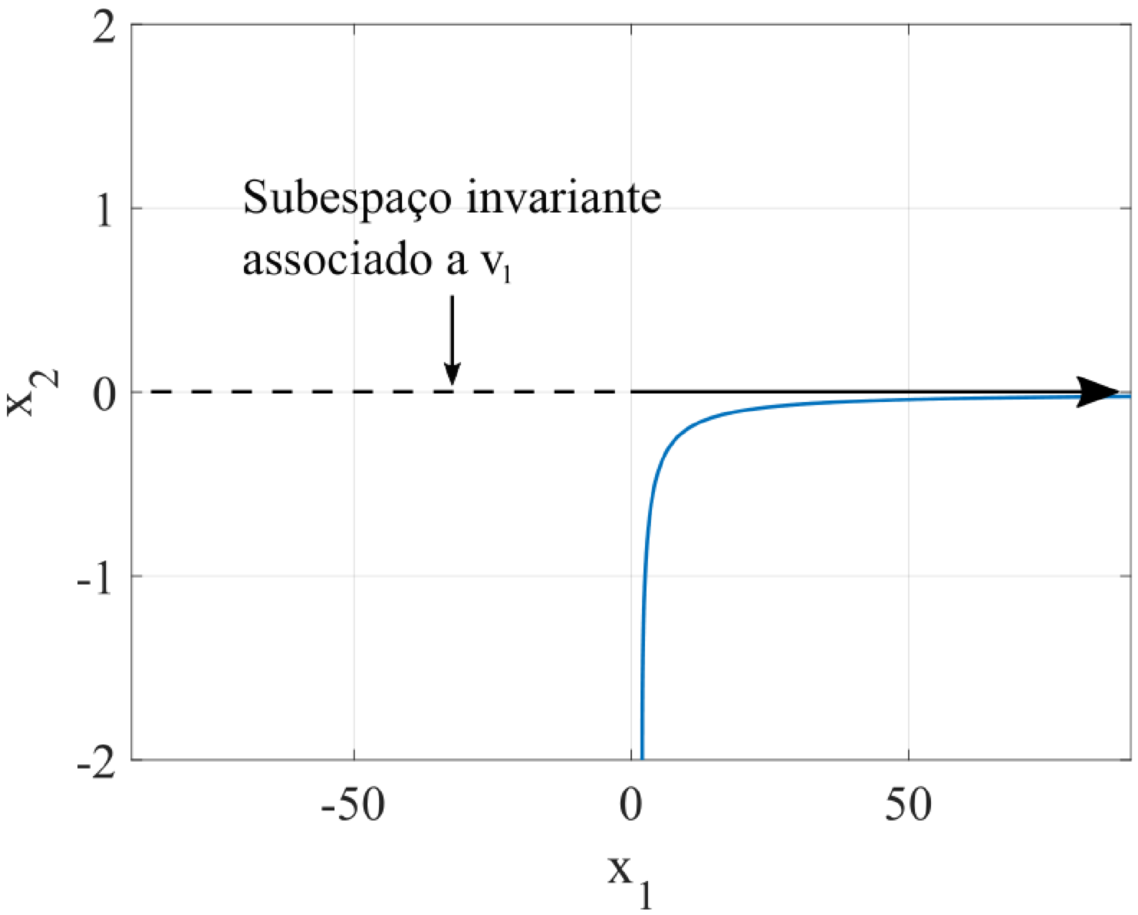
- Gráfico de x_1 em função do tempo:
  - Nota-se que $x_1(t)$ é composta pela somatória de duas componentes: e^t, e^{-t}.
  - A resposta do sistema converge para a componente instável (e^t).

Exemplo 1: Interpretação gráfica



- Gráfico de x_2 em função do tempo:
  - O estado x_2 apresenta um comportamento estável e, portanto, convergirá para seu ponto de equilíbrio.

Exemplo 1: Interpretação geométrica



- Gráfico de x_2 em função de x_1 (Plano de fase):
  - O sistema parte do seu ponto inicial $(2, -2)$ e converge assintoticamente para o subespaço invariante associado ao autovetor v_1

Exemplo 2

- Considere o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

seus autovalores, com respectivos autovetores, são:

$\lambda_1 = -1 + i, v_1 = [1 \quad -i]$ e $\lambda_2 = -1 - i, v_2 = [1 \quad i]$

Além disso, sua condição inicial é $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pela expressão (2), a resposta do sistema é dada por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + c_2 e^{(-1-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

- Novamente, deve-se determinar as constantes c_1 e c_2 que compõem a resposta do sistema. Substituindo os valores de x_1 e x_2 no instante $t = 0\ s$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 e^{(-1+i)\cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + c_2 e^{(-1-i)\cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ -i \cdot c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ i \cdot c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -i \cdot c_1 + i \cdot c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2

- Assim, a resposta completa do sistema do exemplo 1 é:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{(-1-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

- Novamente:

λ_i - modo de resposta do sistema;

v_i - distribuição do modo entre as variáveis de estado.

Exemplo 2

- Para que a resposta seja expressa apenas em termos de números reais, a fórmula de Euler pode ser usada para simplificar as expressões das respostas do sistema.
- A fórmula de Euler é dada por:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot sen\theta$$

A partir disso, o seno e o cosseno podem ser expressos por relações de exponenciais complexas.

$$cos\theta = \frac{e^{i\cdot\theta} + e^{-i\cdot\theta}}{2}, \qquad sen\theta = \frac{e^{i\cdot\theta} - e^{-i\cdot\theta}}{2\cdot i}$$

Exemplo 2

- Dessa forma, tem-se:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}e^{(-1+i)t} + \frac{1}{2}e^{(-1-i)t} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-t}e^{-it} =$$

$$= e^{-t}\frac{\left[e^{it} + e^{-it}\right]}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_1(t) = e^{-t}\cos(t)$$

Exemplo 2

- Dessa forma, tem-se:

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}i \cdot e^{(-1+i)t} + \frac{1}{2}i \cdot e^{(-1-i)t} =$$

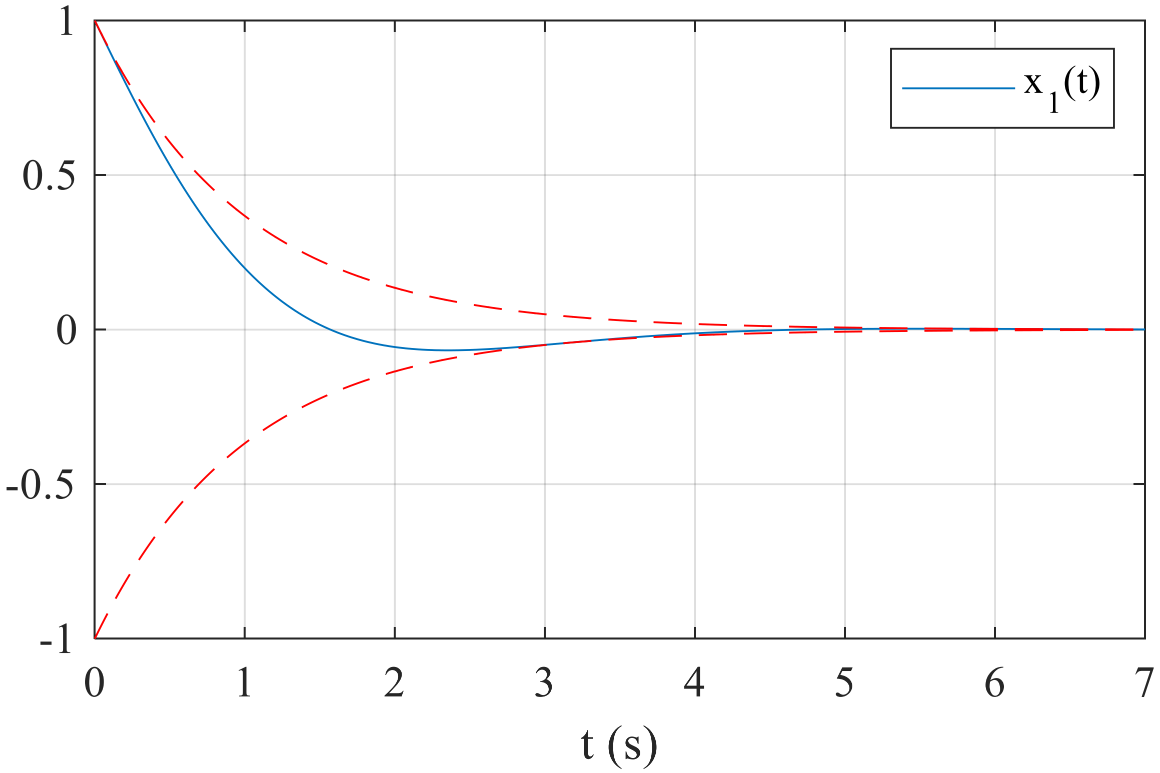
$$= -\frac{1}{2}i \cdot e^{-t}e^{it} + \frac{1}{2}i \cdot e^{-t}e^{-it} \times \frac{i}{i} =$$

$$= \frac{1}{2i}e^{-t}e^{it} + \frac{1}{2i}e^{-t}e^{-it} =$$

$$= e^{-t}\frac{\left[e^{it} - e^{-it}\right]}{2i} \Longrightarrow$$

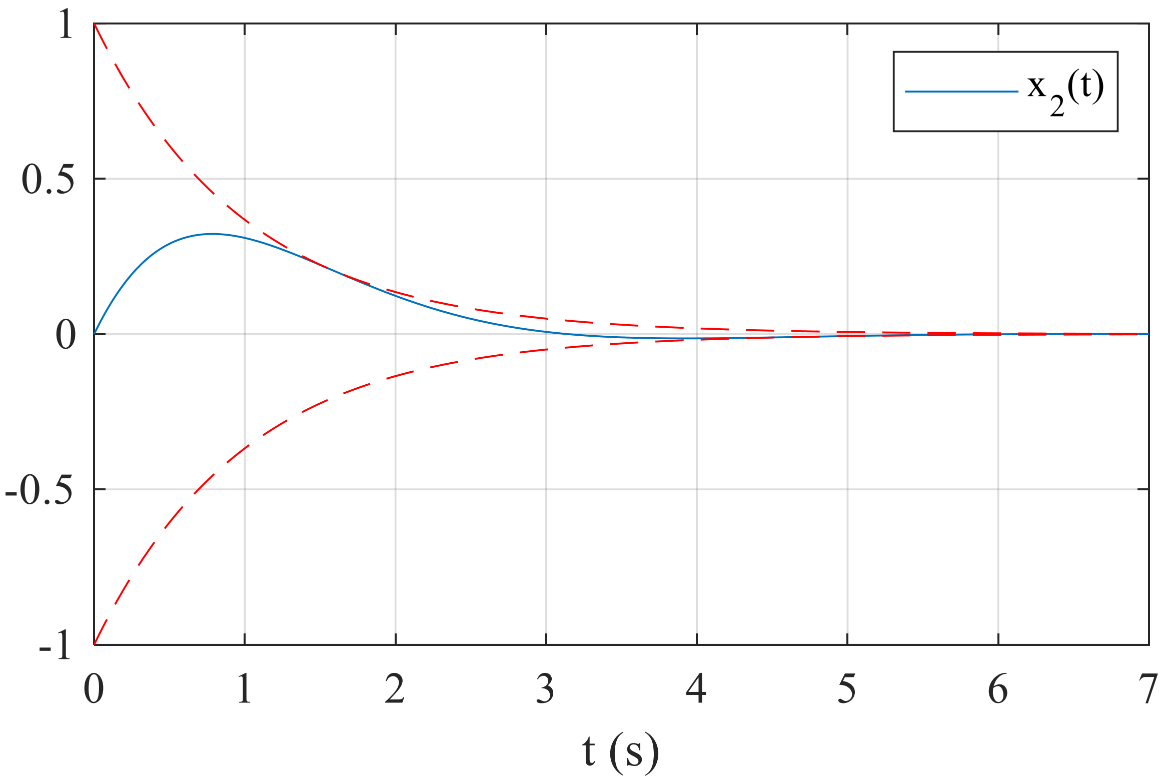
$$\Longrightarrow x_2(t) = e^{-t}\mathrm{sen}(t)$$

Exemplo 2: Interpretação gráfica



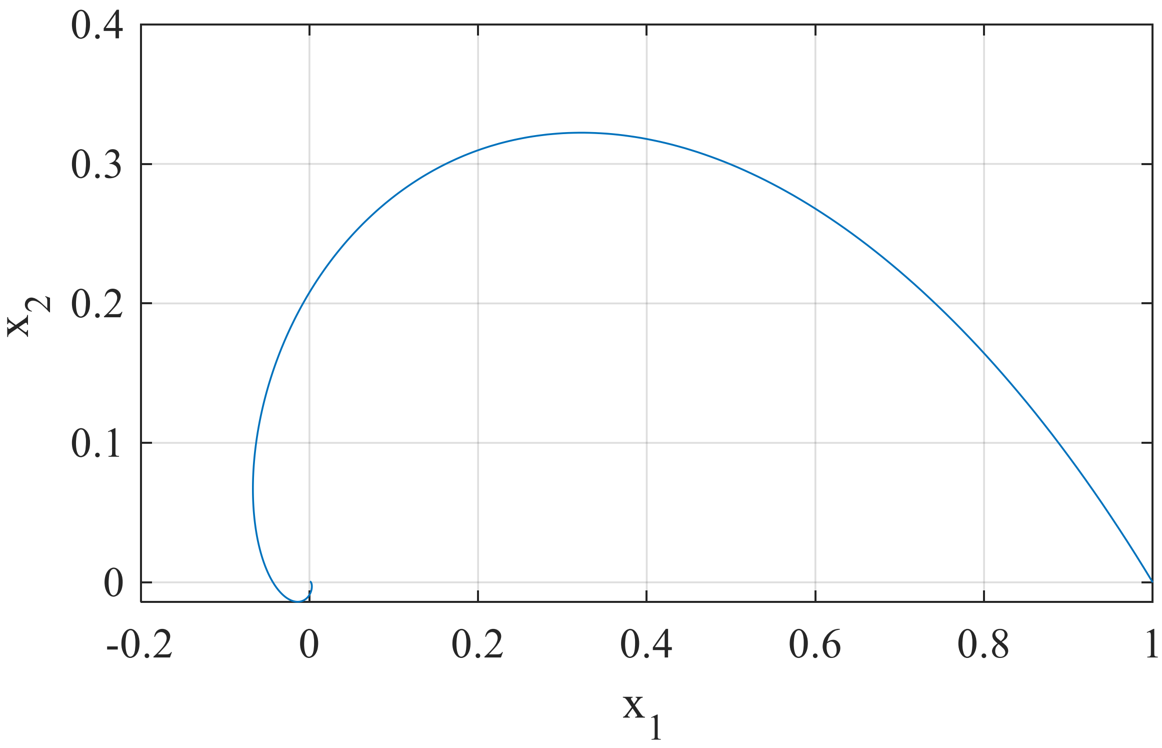
- Gráfico de x_1 em função do tempo:
  - Nota-se que a oscilação de $x_1(t)$ está limitada pelo decaimento exponencial de sua resposta: e^{-t}.
  - A resposta do sistema converge para seu valor de equilíbrio.

Exemplo 2: Interpretação gráfica



- Gráfico de x_2 em função do tempo:
  - Nota-se que a oscilação de $x_2(t)$ está limitada pelo decaimento exponencial de sua resposta: e^{-t}.
  - A resposta do sistema converge para seu valor de equilíbrio.

Exemplo 2: Interpretação gráfica



- Gráfico de x_2 em função de x_1 (Plano de fase):
  - O sistema parte do seu ponto inicial e converge para o ponto de equilíbrio $(0,0)$.

Caracterização do autovalor

- Considerando qualquer autovalor da forma:

$$\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$$

σ_i - Taxa de decaimento da resposta;

ω_i - Frequência de oscilação da resposta.

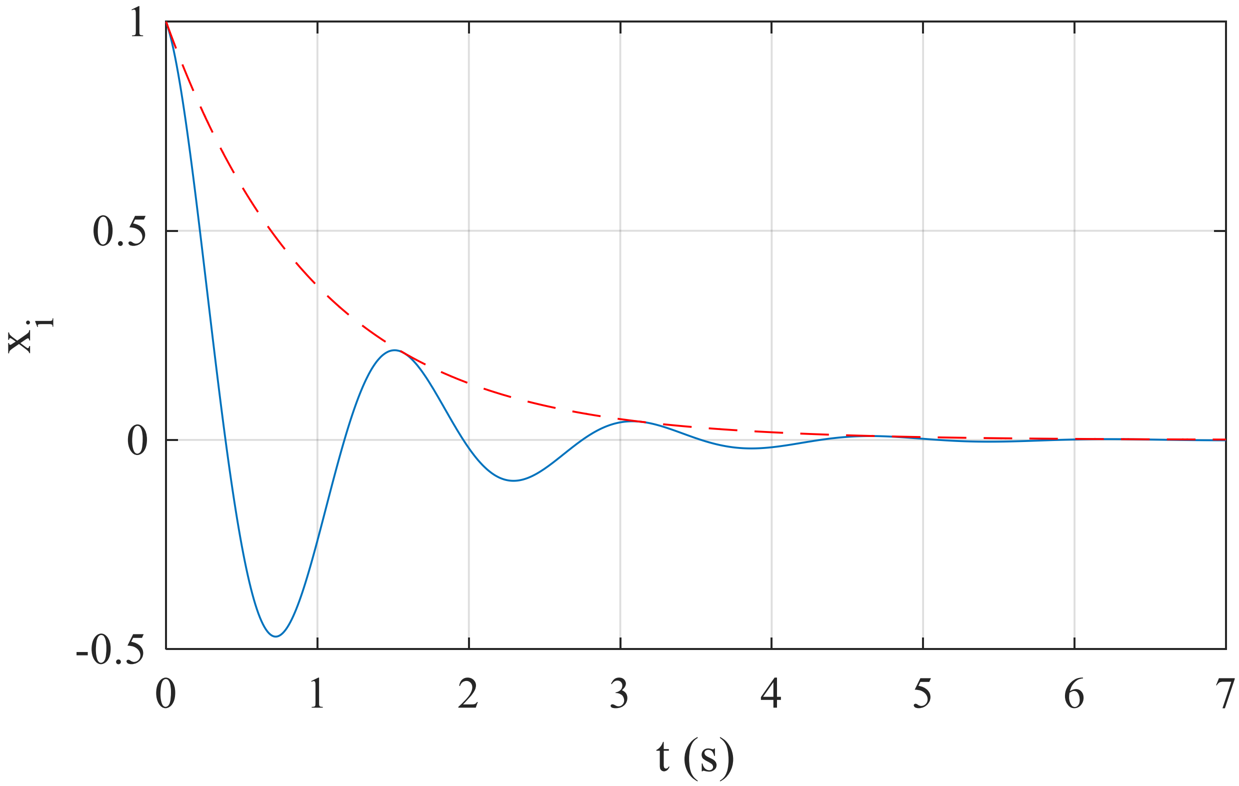
Define-se ainda:

$$\zeta_i = -\frac{\sigma_i}{|\lambda_i|} = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}}$$

ζ_i - Taxa de amortecimento.

Caracterização do autovalor

- A resposta do sistema decai com uma taxa de σ_i.



Exercício

- Modelo linearizado de um sistema de potência:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\dot{\omega} \\ \Delta\dot{E}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 376{,}9911 & 0 \\ -0{,}1010 & 0 & -0{,}1080 \\ -0{,}2333 & 0 & -0{,}4630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \\ \Delta E'_q \end{bmatrix}$$

- Calcule a resposta completa do sistema.

Exercício

1) Calcular o polinômio característico da matriz A:

$$\det(A - sI) = \begin{vmatrix} -s & 376{,}9911 & 0 \\ -0{,}1010 & -s & -0{,}1080 \\ -0{,}2333 & 0 & -s - 0{,}4630 \end{vmatrix} =$$

$$= (-s)(-s)(-s - 0{,}463) + 376{,}9911(-0{,}1080)(-0{,}2333) - [(-s - 0{,}4630)(-0{,}1010)(376{,}991)] =$$

$$= -s^3 - 0{,}4630s^2 + 9{,}4988 - [38{,}0761s + 17{,}6292] =$$

$$= -s^3 - 0{,}4630s^2 - 38{,}0761s - 8{,}1304$$

$$\rightarrow p(s) = -s^3 - 0{,}4630s^2 - 38{,}0761s - 8{,}1304$$

Exercício

2) Calcular as raízes do polinômio característico:

$$\mathrm{p}(\lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 0{,}4630\lambda^2 - 38{,}0761\lambda - 8{,}1304 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -0{,}2138 \\ \lambda_2 = -0{,}1246 + \mathrm{j}6{,}1650 \\ \lambda_3 = -0{,}1246 - \mathrm{j}6{,}1650 \end{cases}$$

3) Determinar a expressão $(A - \lambda_i I)v_i = 0$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i & 376{,}9911 & 0 \\ -0{,}1010 & -\lambda_i & -0{,}1080 \\ -0{,}2333 & 0 & -0{,}4630 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício

4) Encontrando v_1, que é autovetor associado a λ_1:

$$\begin{bmatrix} 0{,}2138 & 376{,}9911 & 0 \\ -0{,}1010 & 0{,}2138 & -0{,}1080 \\ -0{,}2333 & 0 & -0{,}2492 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assumindo $v_{11} = 1$:

$$\begin{cases} 0{,}2138v_{11} + 376{,}911v_{12} = 0 \Rightarrow v_{12} = -0{,}0006 \\ -0{,}233v_{11} - 0{,}2492v_{13} = 0 \Rightarrow v_{13} = -0{,}9362 \end{cases}$$

Assim, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}0006 \\ -0{,}9362 \end{bmatrix}$.

Exercício

4) Encontrando v_2, que é autovetor associado a λ_2:

$$\begin{bmatrix} 0,1246 - j6,1650 & 376,9911 & 0 \\ -0,1010 & 0,1246 - j6,1650 & -0,1080 \\ -0,2333 & 0 & -0,3384 - j6,1650 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assumindo $v_{21} = 1$:

$$\begin{cases} 0,1246 - j6,1650v_{21} + 376,911v_{22} = 0 \;\Rightarrow v_{22} = -0,0003 + j0,0164 \\ -0,233v_{21} - 0,3384 - j6,1650v_{23} = 0 \;\Rightarrow v_{23} = -0,0021 + j0,0377 \end{cases}$$

Assim, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,0003 + j0,0164 \\ -0,0021 + j0,0377 \end{bmatrix}$.

Exercício

4) Encontrando v_3, que é autovetor associado a λ_3. O autovetor v_3 será igual ao conjugado do autovetor v_2, uma vez que os autovalores respectivos são números complexos conjugados.

Assim, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}0003 - j0{,}0164 \\ -0{,}0021 - j0{,}0377 \end{bmatrix}$.

Exercício

5) A resposta do sistema será então:

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta(t) \\ \Delta\omega(t) \\ \Delta E'_q(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-0,2138t} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,0006 \\ -0,9362 \end{bmatrix} + c_2 e^{-(0,1246-j6,1650)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,0003 + j0,0164 \\ -0,0021 + j0,0377 \end{bmatrix} +$$

$$+c_3 e^{-(0,1246+j6,1650)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,0003 - j0,0164 \\ -0,0021 - j0,0377 \end{bmatrix}.$$

As constantes c_1, c_2 e c_3 dependem da condição inicial.

Obs: O sistema irá oscilar na frequência $\omega = 6,1650 \text{ rad/s}$

$\Rightarrow f = 0,9812 \text{ Hz}$ (Modo local)