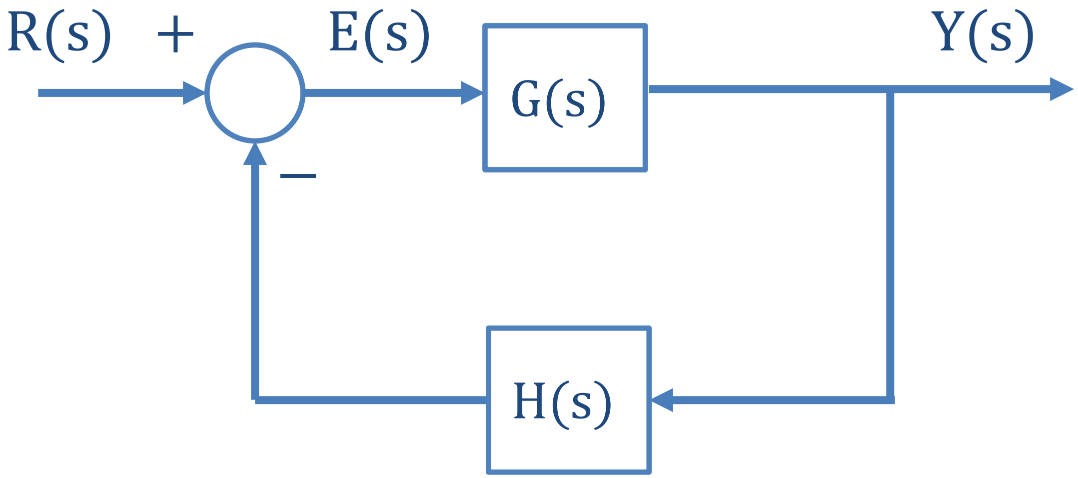
SEL0417 - Fundamentos de Controle

O Método de Lugar de Raízes

O Método de Lugar de Raízes

- Seja o sistema representado pelo seguinte diagrama de blocos:



A FT do sistema em malha fechada é dada por:

$$G_{MF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

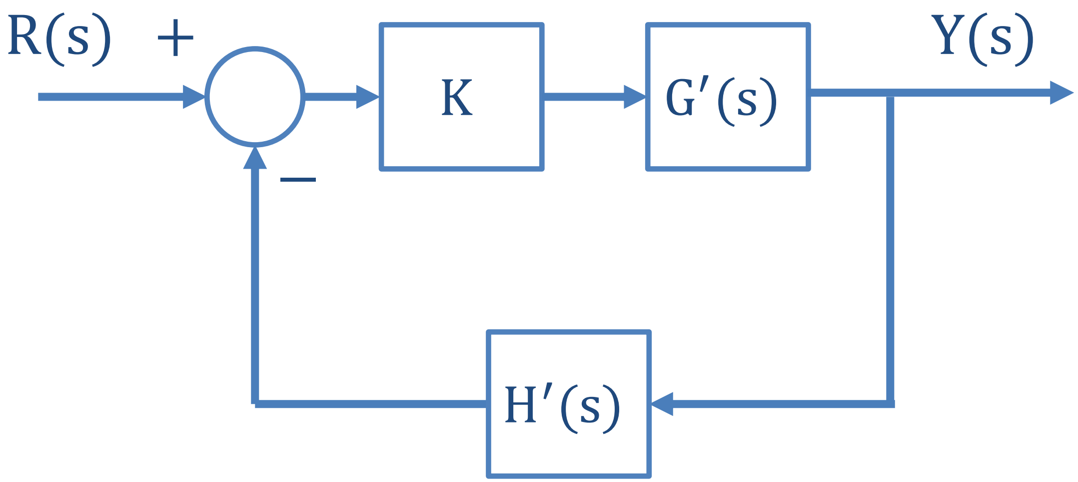
O Método de Lugar de Raízes

- Os polos desse sistema são:

$$P = \{s \in \mathbb{C} / \ 1 + G(s)H(s) = 0\}$$

- Considerando ser possível isolar um parâmetro K em $G(s)H(s)$:

$$G(s)H(s) = KG'(s)H'(s)$$



O Método de Lugar de Raízes

- Suponha que K pode variar de forma ilimitada, ou seja, $-\infty < K < \infty$.
- Definição:

  O lugar de raízes do sistema em malha fechada é o conjunto de polos deste sistema que é obtido variando-se K de $-\infty$ a $+\infty$.

- Assim, quais seriam as condições para que um ponto no plano "s" pertença ao lugar de raízes de um sistema?

O Método de Lugar de Raízes

- Essas condições podem ser encontradas ao igualarmos o denominador de G_{MF} a zero.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + KG'(s)H'(s) = 0 \Rightarrow$$

$$G'(s)H'(s) = -\frac{1}{K}$$

a) Condição de magnitude:

$$|G'(s)H'(s)| = \frac{1}{|K|}, -\infty < K < \infty$$

O Método de Lugar de Raízes

b) Condições de ângulo:

i) Para $K \geq 0$:

$$\angle[G'(s)H'(s)] = (2r + 1)\pi, \qquad r \in \mathbb{N}$$

ii) Para $K \leq 0$:

$$\angle[G'(s)H'(s)] = 2r\pi, \; r \in \mathbb{N}$$

Obs 1: As condições a) e b) podem ser usadas para determinar as trajetórias das raízes no plano "s".

Obs 2: A partir do gráfico de lugar das raízes, pode-se determinar o ganho em um ponto específico usando a condição a).

O Método de Lugar de Raízes

- O $G(s)H(s)$ pode ser usado na forma polo-zero-ganho:

$$G(s)H(s) = KG(s)H(s) = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

Assim, as condições de ângulo podem ser expressas por:

i. Para $K \geq 0$ (*root loci*):

$$\angle[G'(s)H'(s)] = \sum_{i=1}^{m} \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle\left(s+p_j\right) = (2r+1)180°, r \in \mathbb{Z}$$

O Método de Lugar das Raízes

ii. Para $\mathrm{K} \leq 0$ (*complementary root loci*): :

$$\angle[\mathrm{G}'(\mathrm{s})\mathrm{H}'(\mathrm{s})] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \angle(\mathrm{s} + \mathrm{z_i}) - \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \angle\left(\mathrm{s} + \mathrm{p_j}\right) = 2r180°, \mathrm{r} \in \mathbb{Z}$$

Obs: Note que, para o caso de K positivo, a somatória das fases deve ser igual a um múltiplo ímpar de $180°$. Para K negativo, a somatória deve ser um múltiplo par.

Exemplo

- Seja o sistema com a FT de malha aberta:

$$G(s)H(s) = K \cdot \frac{(s + z_1)}{s(s + p_2)(s + p_3)}$$

Para atender às condições de ângulo, é preciso que seja verdade a seguinte relação:

$$\theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = (2r + 1)180°, r \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = 2r180°, r \in \mathbb{Z}$$

- Se a condição de ângulo for verdadeira, nesse caso, s_1 pertence ao lugar de raízes.