SEL0417 - Fundamentos de Controle

Sistemas de 2ª Ordem

Índices de Desempenho para Sistemas de 2ª Ordem

1. Sobressinal (*overshoot*) máximo:

Seja a resposta do sistema:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \mathrm{sen}(\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \cos^{-1}(\zeta))\right]$$

É possível encontrar o sobressinal máximo, igualando a derivada da resposta a zero:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow t = \frac{n \cdot \pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Índices de Desempenho para Sistemas de 2ª Ordem

1. Sobressinal (*overshoot*) máximo:

O instante de tempo (t_{MAX}), associado ao máximo valor alcançado pela resposta do sistema de 2ª ordem, pode ser calculado para $\mathrm{n} = 1$.

$$\mathrm{t_{MAX}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

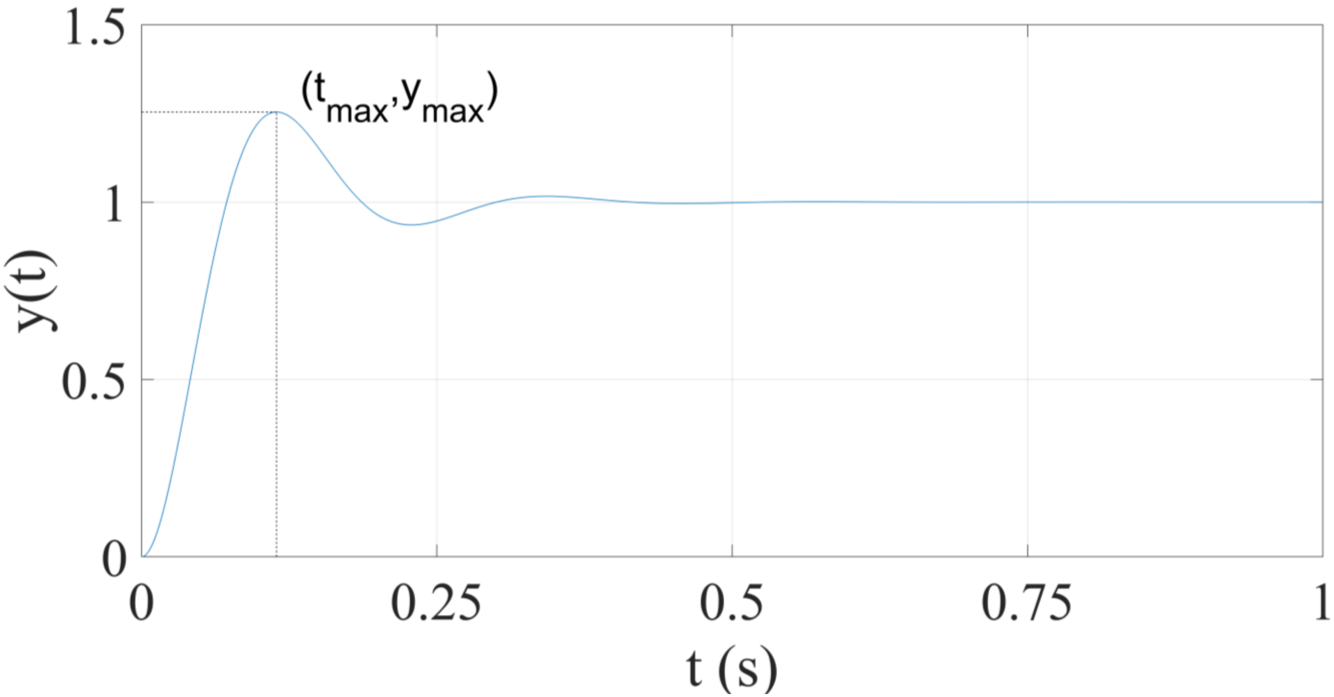
Com isso, encontra-se o máximo valor da resposta do sistema por:

$$\mathrm{y_{MAX}} = \mathrm{K}\left[1 + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right]$$

Índices de Desempenho para Sistemas de 2ª Ordem

1. Sobressinal (*overshoot*) máximo:

$$M_0 = y_{MAX} - K = K\left[1 + e^{-\frac{\pi\cdot\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right] - K \Rightarrow \boxed{M_0 = Ke^{-\frac{\pi\cdot\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}$$



Índices de Desempenho para Sistemas de 2ª Ordem

2. Tempo de Atraso (*Delay Time*) - t_d : tempo para que a resposta atinja 50% do valor de regime.

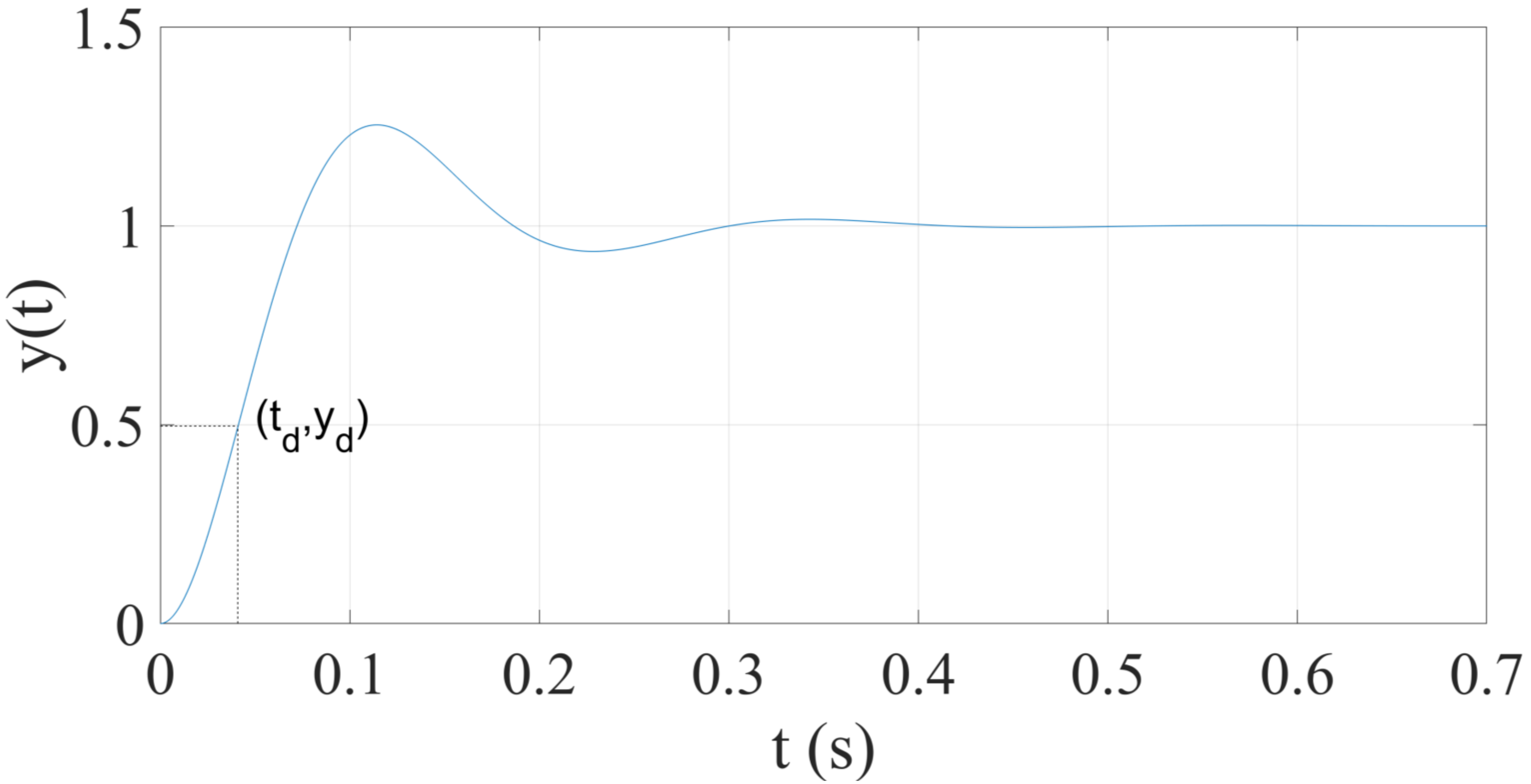
$$y(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \cos^{-1}(\zeta)\right)\right] = 0{,}5K$$

Considerando que $0 < \zeta < 1$, a solução dessa equação pode ser expressa por uma aproximação de polinômios

$$\Rightarrow t_d \cong \frac{1+0{,}7\zeta}{\omega_n} \text{ ou } \Rightarrow t_d \cong \frac{1{,}1+0{,}125\zeta+0{,}469\zeta^2}{\omega_n}$$

Índices de Desempenho para Sistemas de 2ª Ordem

2. Tempo de Atraso (*Delay Time*) - t_d :



Índices de Desempenho para Sistemas de 2ª Ordem

3. Tempo de Subida (*Rise Time*) - t_r : tempo para que a resposta passe de 10% para 90% do seu valor de regime.

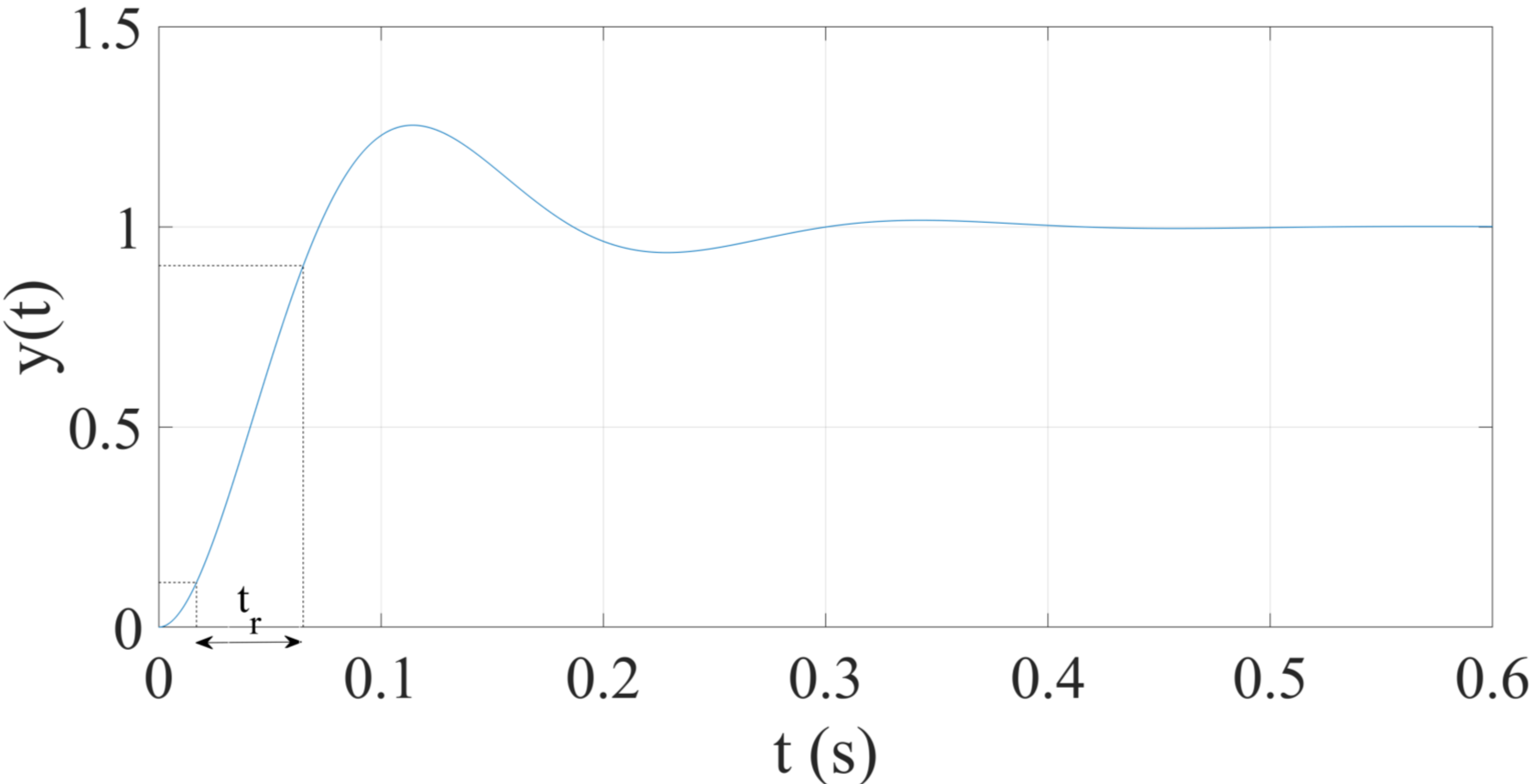
$$\mathrm{t_r} = \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2}$$

Esse instante, pode ser expresso também por uma aproximação de polinômios (Válido para $0 < \zeta < 1$):

$$\mathrm{t_r} \cong \frac{0{,}8+2{,}5\zeta}{\omega_n} \text{ ou } \mathrm{t_r} \cong \frac{1-0{,}4167\zeta+2{,}917\zeta^2}{\omega_n}$$

Índices de Desempenho para Sistemas de 2ª Ordem

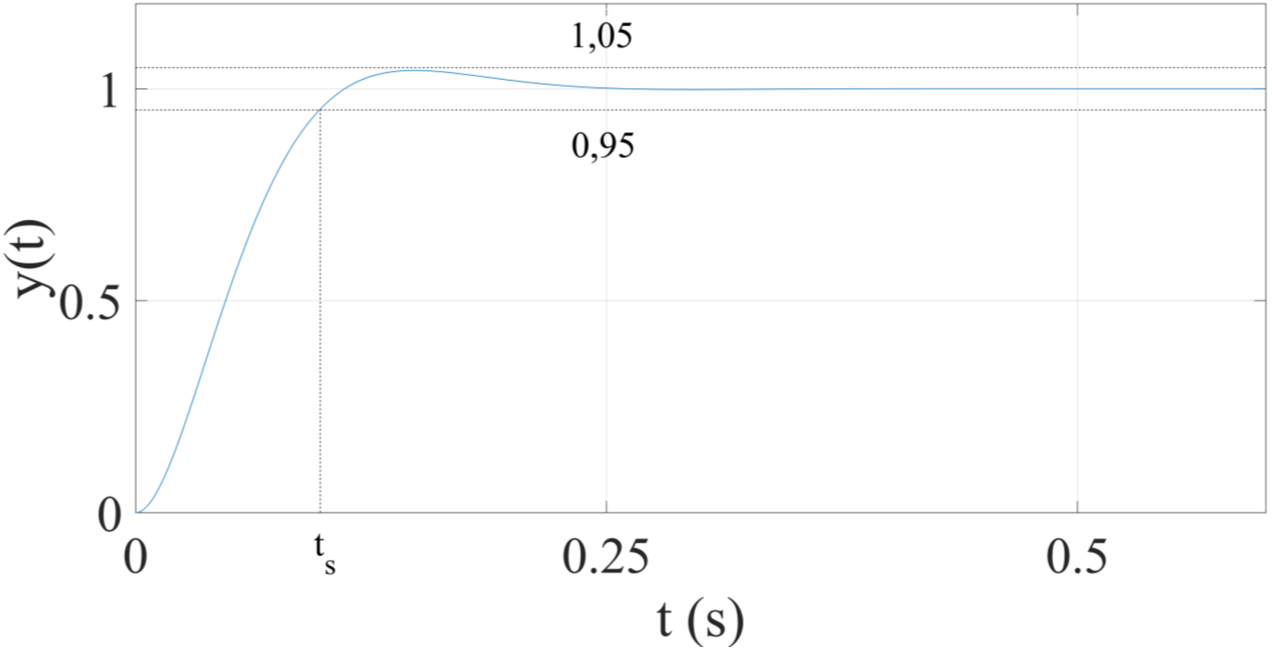
3. Tempo de Subida (*Rise Time*) - t_r : tempo para que a resposta passe de 10% para 90% do seu valor de regime.



Índices de Desempenho para Sistemas de 2ª Ordem

4. Tempo de acomodação (*Settling Time*) - t_s : tempo para que a resposta fique no intervalo $0{,}95\mathrm{K} \leq \mathrm{y(t)} \leq 1{,}05\mathrm{K}$.

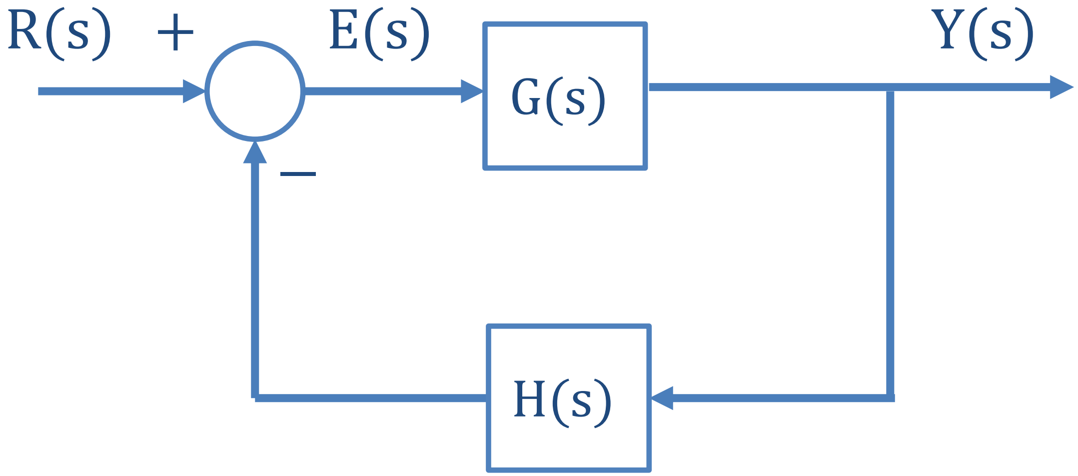
$$\mathrm{t_s} = \frac{4{,}5\zeta}{\omega_\mathrm{n}} \Rightarrow \text{para } \zeta > 0{,}69$$



O Problema de Rastreamento de Referência ("*Reference Tracking*")

Reference Tracking

- Considerando o seguinte diagrama de blocos:



sabe-se que a função de transferência do sistema representado por esse diagrama é:

$$G_{MF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Erro de regime permanente

- Nas condições apresentadas, o erro do sistema é dado por:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

- Considerando que a entrada seja um sinal do tipo degrau unitário, a expressão do erro torna-se:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

Erro de regime permanente

- Para encontrar o erro de regime permanente, o teorema do valor final deve ser aplicado.
- Antes, é preciso considerar que a expressão $\mathrm{G(s)H(s)}$, para $s \to 0$, é igual a K.
- Assim, pelo teorema do valor final:

$$\lim_{\mathrm{t}\to\infty} \mathrm{e(t)} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \mathrm{s} \cdot \mathrm{E(s)}$$

o erro de regime permanente do sistema será:

$$\lim_{\mathrm{t}\to\infty} \mathrm{e(t)} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \mathrm{s} \cdot \frac{1}{1+\mathrm{G(s)H(s)}} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{\lim_{\mathrm{t}\to\infty} \mathrm{e(t)} = \frac{1}{1+K}}$$