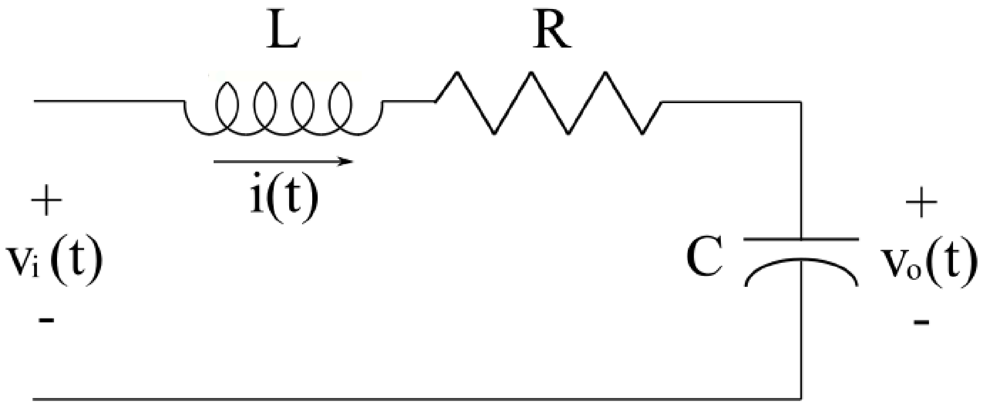
# SEL0417 - Fundamentos de Controle

## Resposta de Sistemas de 1ª e 2ª Ordens

# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- Seja o circuito:




$$v_i(t) - L\frac{di(t)}{dt} - Ri(t) - v_o(t) = 0$$

$$v_o(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- Considerando:

$$\mathrm{u} = \mathrm{v_i(t)}; \;\; \mathrm{y} = \mathrm{v_o(t)}; \;\; \mathrm{x} = \mathrm{i(t)}$$

Tem-se:

$$\mathrm{u(t)} - \mathrm{L}\dot{\mathrm{x}} - \mathrm{Rx} - \frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{x}(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \qquad \text{aplicando } \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)$$

$$\dot{\mathrm{u}} - \mathrm{L}\ddot{\mathrm{x}} - \mathrm{R}\dot{\mathrm{x}} - \frac{1}{\mathrm{C}}\mathrm{x} = 0, \qquad \text{aplicando } (\mathcal{L})$$

$$Ls^2X(s) + RsX(s) + \frac{1}{C}X(s) = sU(s)$$

# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- Assim, a relação entre a corrente do indutor e a tensão de entrada se dá por:

$$X(s) = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} U(s)$$

Para obter a F.T, basta aplicar a transformada de Laplace em $\boxed{y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t x(\tau)d\tau \Rightarrow X(s) = sC \cdot Y(s)}$. Assim, tem-se:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- Forma padrão da Função de Transferência do sistema de 2ª ordem:

$$\mathrm{G(s)} = \mathrm{K}\frac{\mathrm{w_n^2}}{\mathrm{s^2} + 2\zeta\mathrm{w_n s} + \mathrm{w_n^2}}$$

Pólos:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$\mathrm{w_n}$= Frequência natural de oscilação;

$\zeta$= Fator (ou taxa) de amortecimento; e

K= Ganho em regime permanente.

Obs: No circuito RLC: $\mathrm{w_n} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$, $\zeta = \frac{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{LC}}}{2\mathrm{L}}$, $\mathrm{K} = 1$

# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- A resposta do sistema varia qualitativamente com o valor de ζ.
- Considerando a resposta ao degrau:

$$\mathrm{Y(s)} = \mathrm{G(s)U(s)} = \mathrm{K}\frac{\mathrm{w_n^2}}{\mathrm{s^2} + 2\zeta \mathrm{w_n} s + \mathrm{w_n^2}} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}} \Rightarrow$$

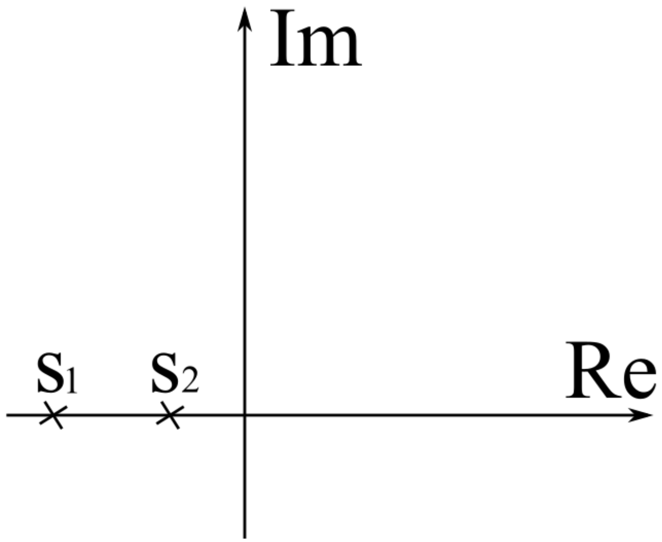
$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen(\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \cos^{-1}(\zeta))\right]$$

# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- 1º caso: $\zeta > 1$ -> Sistema sobreamortecido

Pólos:

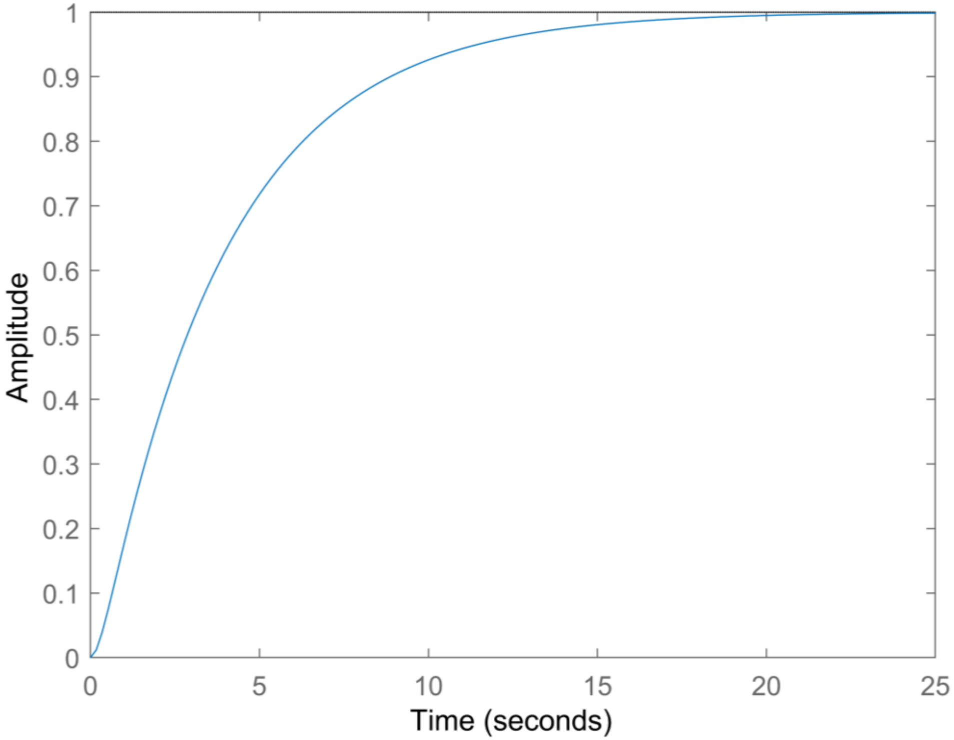
$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_n + j\omega_n\left(j\sqrt{\zeta^2-1}\right) = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \\ s_2 &= -\zeta\omega_n - j\omega_n\left(j\sqrt{\zeta^2-1}\right) = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \end{aligned}\right\} \text{Reais e distintos}$$



# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

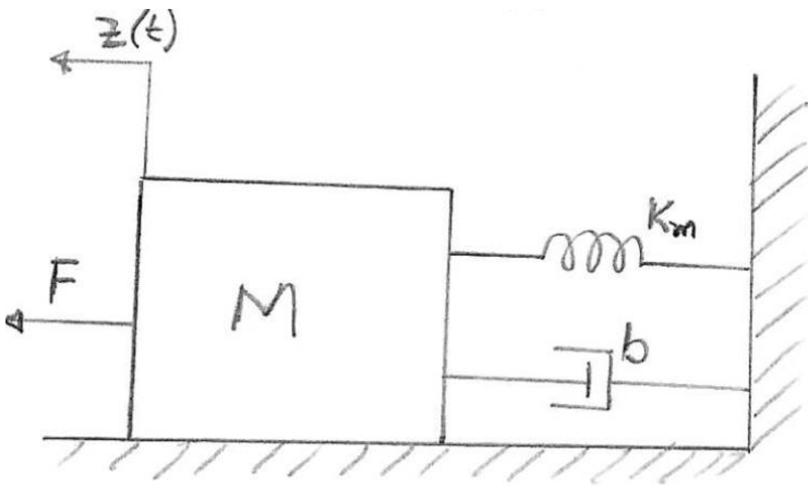
- 1º caso: $\zeta > 1$ -> Sistema sobreamortecido

No circuito RLC, $R > \frac{2L}{\sqrt{LC}}$. Assim, a resposta ao degrau unitário será:



# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- 1º caso: $\zeta > 1$
  - O comportamento da resposta sobreamortecida é similar ao sistema de primeira ordem.
  - Análogo mecânico:

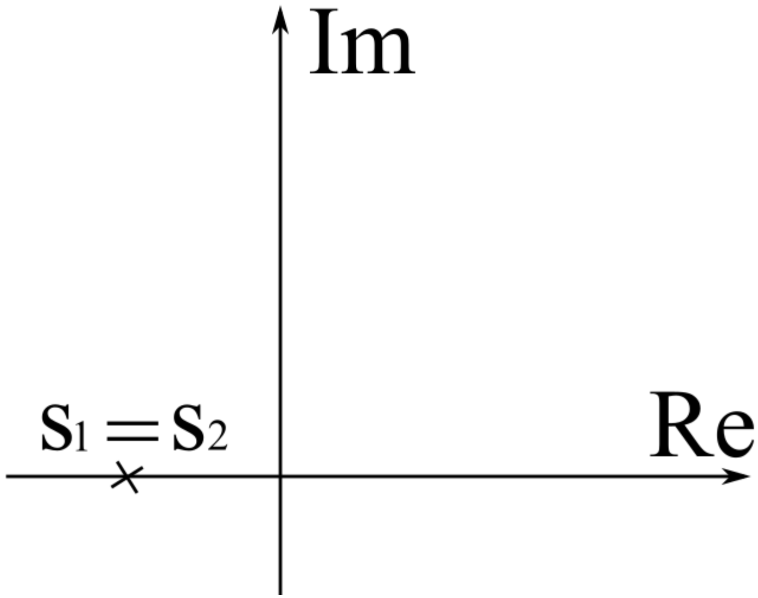



$$M\ddot{z} = -K_m z - b\dot{z} + F$$
$$y = z; x = z; u = F$$
$$Ms^2X(s) = -K_mX(s) - bsX(s) + F(s)$$
$$X(s) = \frac{1}{Ms^2 + bs + K_m}F(s)$$
$$\zeta = \frac{b}{2M}\sqrt{\frac{M}{K_m}} > 1$$

# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- 2º caso: $\zeta = 1$ (Sistema criticamente amortecido)

Pólos:
$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -1\omega_n + j\omega_n\left(\sqrt{1-1}\right) = -\omega_n \\ s_2 &= -1\omega_n - j\omega_n\left(\sqrt{1-1}\right) = -\omega_n \end{aligned}\right\}$$
Reais e iguais



# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

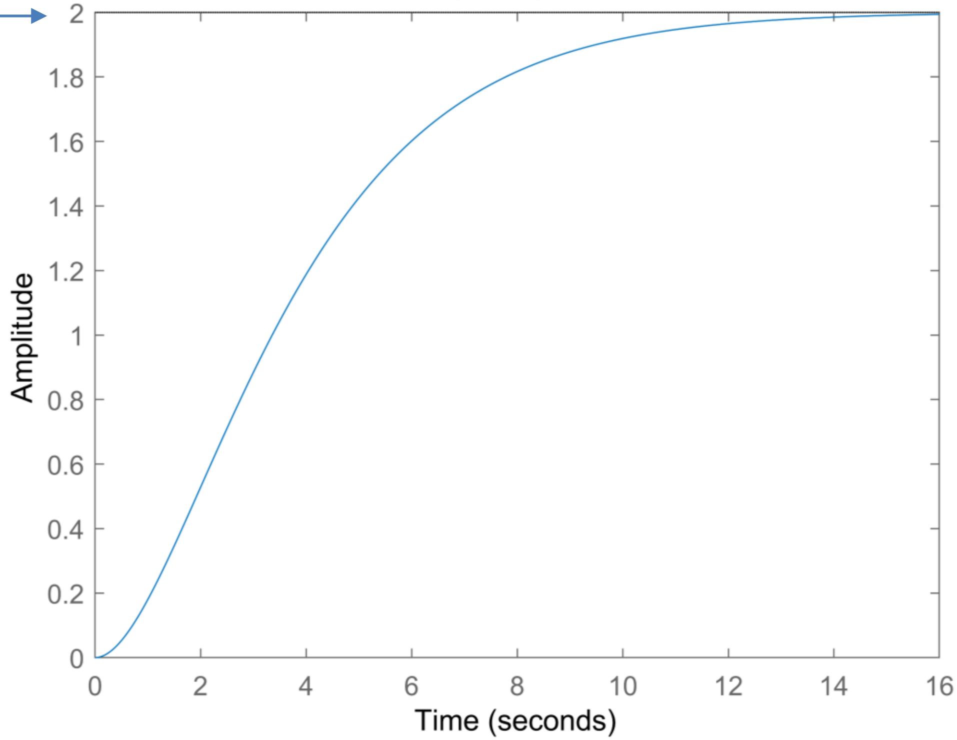
- 2º caso: $\zeta = 1$ (Sistema criticamente amortecido)

  – Sistema massa-mola-amortecedor: $\zeta = 1 \Rightarrow b = 2\sqrt{\frac{K_m}{M}} \cdot M$

  – Considerando:

  $K_m = 0{,}5 \; e \; M = 2$

$\frac{1}{K_m} \rightarrow$



# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

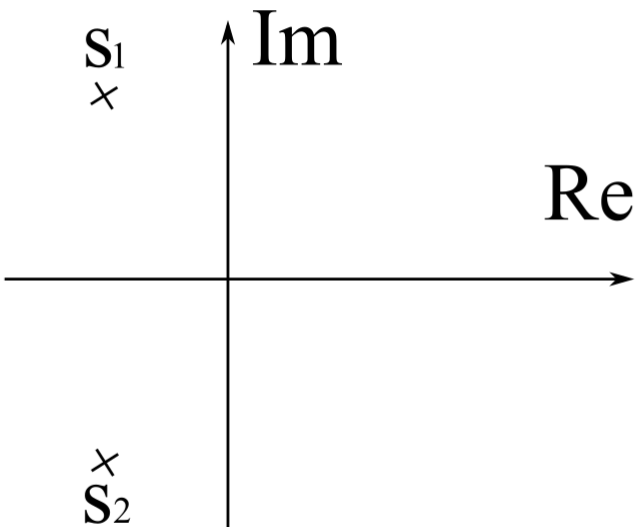
- 3º caso: $\zeta < 1$

Pólos:
$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$
$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$
Complexo conjugados

Assim, o sistema apresenta:

Frequência de oscilação: $\Im(s) = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Decaimento de amplitude: $\Re(s) = -\zeta\omega_n$



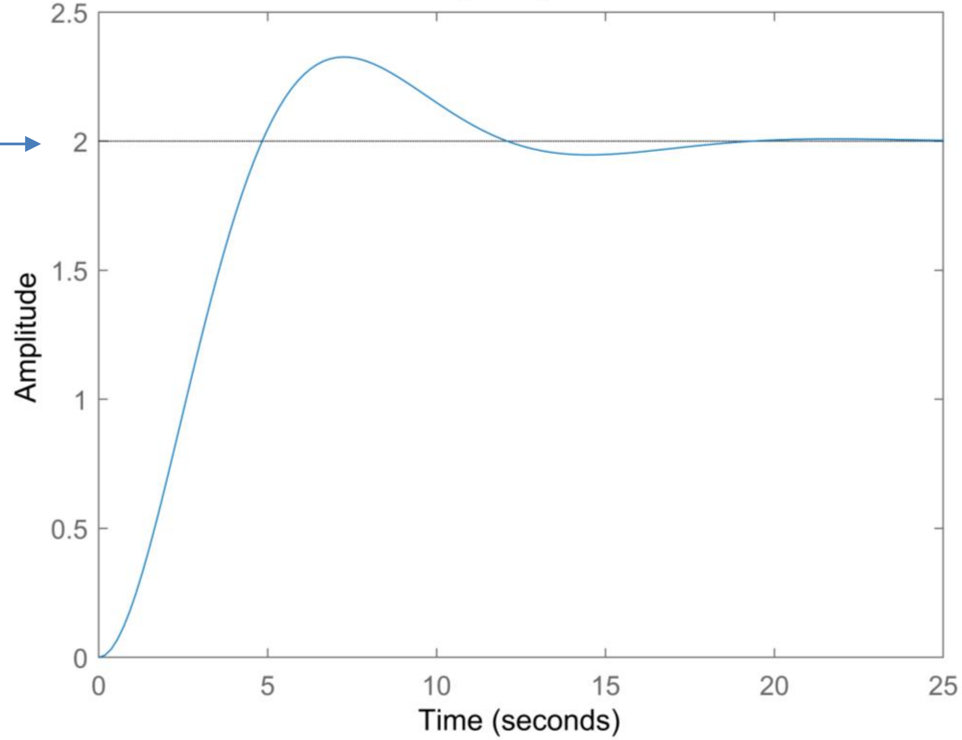
# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- 3º caso: $\zeta < 1$
  - Sistema massa-mola-amortecedor: $\zeta < 1 \Rightarrow b < 2\sqrt{\frac{K_m}{M}}M$

Considerando: $K_m = 0,5 \ e \ M = 2$

$b = 1$

$\frac{1}{K_m} \rightarrow$



# Resposta de Sistemas de 2ª Ordem

- Observações:
  - A suspensão de um automóvel, idealmente, deve ser criticamente amortecida. Na prática, seu comportamento, em geral, é subamortecido.
  - No circuito RLC, a taxa de amortecimento é diretamente proporcional à resistência (às perdas). Quanto maior forem as perdas, para um mesmo conjunto de indutância e capacitância, maior será o amortecimento do sistema (O sistema alcança o regime de forma mais lenta).
  - Com a redução da taxa de amortecimento, conforme ela se aproxima de zero, a oscilação da resposta do sistema se aproximará frequência natural.