Controle - SEL417

26/02

1

login = sel417

senha = controle

Monitora: Qua.
Edson

Prof: Quar e Qui
10h - 12h

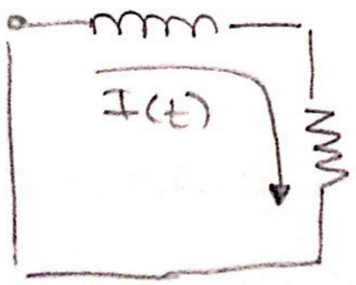
Provas: P1 - 10/04
P2 - 18/06
Sub - 25/06
Rec - 02/07

fcontrole2014@gmail.com

Aula 1 - Introdução

Sistemas dinâmicos: sistemas com características que variam no tempo, sendo geralmente modelados por equações diferenciais (variação contínua) ou de diferenças (variação discreta).

Exemplo: Circuito RL



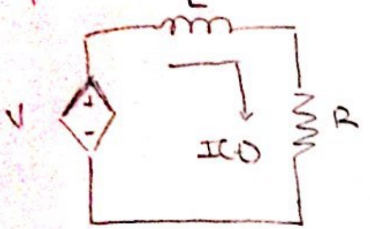
$$L\frac{d\dot{I}(t)}{dt} + RI(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{I} = -\frac{R}{L} \cdot I$$

↓ Derivada temporal de I.

Entrada: Elemento ou canal, geralmente externo ao sistema, capaz de influenciar na dinâmica do mesmo.

Exemplo: Fonte de Tensão no circuito RL



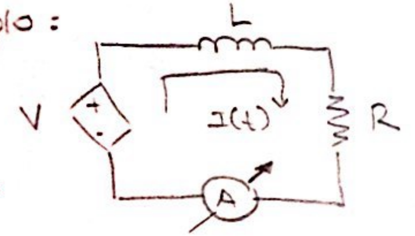
$$-V + L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = 0$$

$$\dot{I} = -\frac{R}{L} I + \frac{V}{L}$$

⇒ Valor de V altera a derivada temporal de I.

Saída: Elemento ou canal, acessível do sistema, podendo ser medido diretamente por processo físico.

Exemplo:



corrente no circuito RL medida com amperímetro

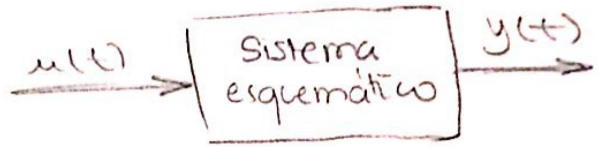
↳ Saída Controlada: é aquela em uma da qual eu imponho objetivos de controle

Ex: Nível do reservatório

↳ Saída Realimentada: ?

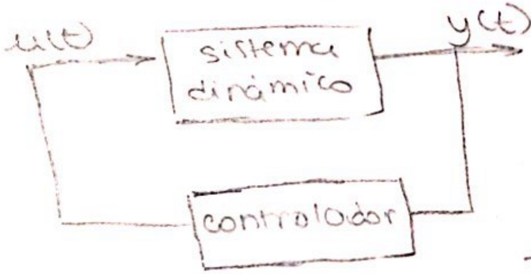
Ex: Posição de Abertura da comporta

Representação Esquemática:

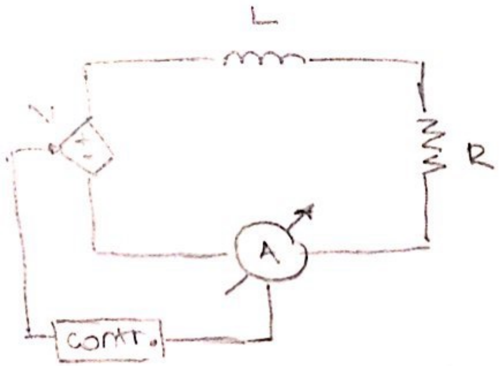


Controlador ou sistema de controle:

Dispositivo que atua na entrada de um sistema dinâmico com o objetivo que sua saída tenha o comportamento desejado.



* Nesse caso a saída controlada é também realimentada.



1

Modelagem de Sistemas dinâmicos.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$$

- Resposta ao impulso
- Função transferência
- Espaço de Estados

Modelagem por Função de Transferência

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}[\cdot]} F(s)$$

domínio tempo → domínio da frequência

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) . e^{-st} dt \; ;$$

$$D(F) = \{ s \in \mathbb{C} / F(s) \text{ existe} \}$$

Algumas propriedades da transformada de La Place:

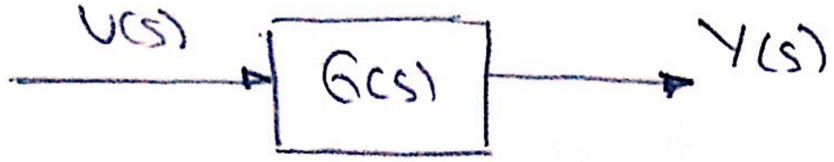
i) $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$

ii) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) . d(t)\right] = \frac{1}{s} F(s)$

iii) $\mathcal{L}[K . f(t)] = KF(s)$. $K \in \mathbb{R}$

iv) $\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = F(s) + G(s)$

• Representação Esquemática



$G(s)$ = Função de Transferência

• Obtenção de F.T. a partir de EDO

Suponha que:

$$a\dot{y} + by - u = 0$$

Descreve um sistema com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$.

$$\mathcal{L}[a\dot{y} + by - u] = \mathcal{L}[0]$$

$$a\mathcal{L}[\dot{y}] + b\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[u]$$

$$a[sY(s) - \cancel{y(0)}^{\,0}] + bY(s) = U(s)$$

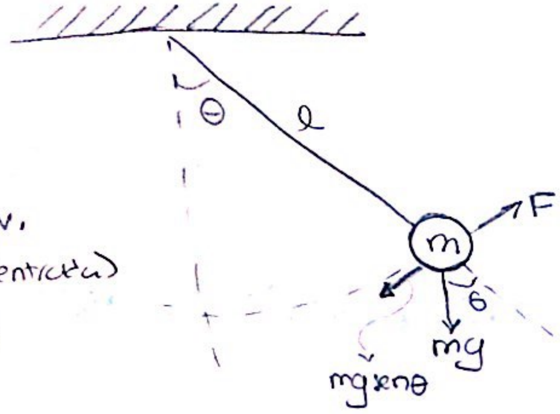
$$Y(s)(as+b) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{as+b}U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{as+b}$$

↳ Não pode ser aplicado(s) a sistemas que não partem do repouso

↳ Não pode ser aplicado a sist. não linear

Exemplo:



l - comprimento

m - massa

g - aceleração grav.

F - força externa (entrada)

θ - ângulo (saída)

$$J\ddot{\theta} = \sum_i T_i$$

$$ml^2\ddot{\theta} = F.l - mg\,sen\theta . l$$

→ Sistema não pode ser representado por funções de transferência !

→ Alternativa: representação por espaço de estados

② Modelagem por espaço de estados

• **Definição:** ESTADO de um sistema é um conjunto de informações suficientes para caracterizar seu comportamento de forma completa

• **Representação:** $X \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

x → vetor de estado

$x_i,\ i = 1, 2, \dots n$

↳ variáveis de estado

• **Forma geral do modelo de estados**

Eq. estado → $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$

Eq. saída → $y = g(x, u)$, $y \in \mathbb{R}^q$

$$\dot{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}. \text{ Portanto } f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Exemplo: Pêndulo Simples

$$\ddot{\theta} = \frac{F}{lm} - \frac{g}{l} sen\theta$$

$x_1 = \theta$; $x_2 = \dot{\theta}$; $u = F$; $y = \theta$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sen x_1 + \frac{1}{lm} u$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} sen x_1 + \frac{1}{lm} u \end{bmatrix} \quad (1) \text{ entrada}$$

$$y = x_1 \quad (2) \text{ saída}$$

3) Linearização de Modelos de Estado

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0$$

→ Expansão truncada em série de Taylor

Admitindo que

$f(x_e) = 0 \Rightarrow x_e$ é um ponto de equilíbrio

E definindo

$$\Delta x = x - x_e$$

Pode se expandir $f(x)$ em torno do ponto x_e:

$$f(x) = \overset{0}{f(x_e)} + \overset{A}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_e}} \overset{\Delta x}{(x - x_e)} + \frac{1}{2}(x - x_e)^T \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_e} (x - x_e) + \dots$$

$$\dot{x} = A\Delta x + \dots \quad , \quad x(0) = x_0$$

Admitindo que x não se afasta significantivamento de x_e tem-se Δx "pequeno" e pode se desprezar os termos de ordem superior a 1, ou seja,

$\boxed{f(x) \simeq A\Delta x}$ numa vizinhança do ponto x_e.

Além disso,

$$\Delta \dot{x} = \frac{d(x - x_e)}{dt} = \dot{x} - 0 = \dot{x}$$

E, portanto,

$\Delta\dot{x} = A\Delta x \quad , \quad \Delta x(0) = \Delta x_0$

É uma boa aproximação de

$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0$

em torno do ponto x_e

6/03 - Aula3

→ Modelo linearizado

$\dot{x} = f(x,u) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad u \in \mathbb{R}^p$

$y = g(x,u) \quad . \quad y \in \mathbb{R}^q$

⇓

$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \quad (1)$

$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u \quad (2)$

$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e, u_e)} : A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e, u_e)} : B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_e, u_e)} : C \in \mathbb{R}^{q \times n}$

$D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(x_e, u_e)} : D \in \mathbb{R}^{q \times p}$

Exemplo: $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta$, $\mu = F$, $y = \theta$

Modelo não linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(g/\ell)\,\mathrm{sen}\,x_1 + \frac{1}{\ell m} u \end{bmatrix}$$

$$y = g(x_1, x_2, u) = x_1$$

Modelo linearizado:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{(x_e,u_e)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{(x_e,u_e)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{(x_e,u_e)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{(x_e,u_e)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\underbrace{\cos x_{1e}}_{} & 0 \end{bmatrix}$$

x_1 de equilíbrio $= \theta e$

Como encontrar?

$$\Rightarrow \underbrace{0}_{\text{vel.}} = -\frac{g}{\ell}\,\underbrace{\mathrm{sen}\,x_e}_{\text{ang. equilíbrio}} + \frac{1}{\ell m}\,\underbrace{u_e}_{\text{força equilíbrio}}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}\Big|_{(x_e,u_e)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\Big|_{(x_e,u_e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\ell m} \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos x_{1e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\ell m \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \Delta u$$

• Relação entre FT e modelo de estados

→ Aplicando Laplace na equação (1)

$$\mathcal{L}[\Delta\dot{x}] = \mathcal{L}[A\,\Delta x] + \mathcal{L}[B\,\Delta u] \Rightarrow$$

$$\underbrace{s\,\Delta X(s)}_{s.I.\,\Delta X(s)} = A\,\Delta X(s) + B\,\Delta U(s) \Rightarrow$$

$$[sI - A]\,\Delta X(s) = B\,\Delta U(s)$$

$$\Delta X(s) = [sI - A]^{-1} \cdot B\,\Delta U(s)$$

$$\mathcal{L}[\Delta y] = \mathcal{L}[C\Delta x] + \mathcal{L}[D\Delta u]$$

$$\Delta y(s) = C\,[sI - A]^{-1} B\,\Delta U(s) + D\,\Delta U(s)$$

$$\boxed{G(s) = C\,[sI - A]^{-1} B + D}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\ell m \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + 0\,\Delta u$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ g/\ell & s \end{bmatrix} \qquad [sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 + g/\ell} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -g/\ell & s \end{bmatrix}$$

$$C[sI-A]^{-1} = \frac{1}{s^2+g/\ell}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -g/\ell & s\end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+g/\ell}\begin{bmatrix} s & 1\end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}$$

Inversão de Matrizes.

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11}\end{bmatrix}$$

$$C[sI-A^{1}]B = \frac{1}{s^2+g/\ell}\begin{bmatrix} s & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\ell m}\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\ell m}\,\frac{1}{s^2+g/\ell}$$

Portanto,

$$G(s) = \frac{1}{\ell m s^2 + gm}$$

12/03

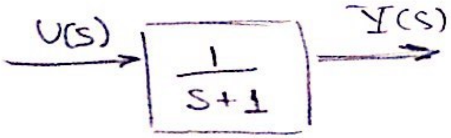
→ Diagrama de Blocos

• Fornece uma representação esquemática de um sistema dinâmico no domínio da frequência.

Exemplo 1:

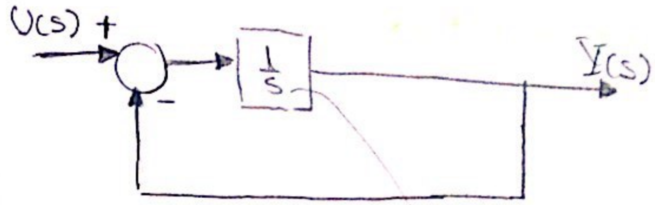
$$\dot{x} = -x + u \Rightarrow sX(s) = -X(s) + U(s) \qquad (1)$$
$$y = x \Rightarrow Y(s) = X(s) \qquad (2)$$

$$X(s)(s+1) = U(s)$$
$$Y(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$$



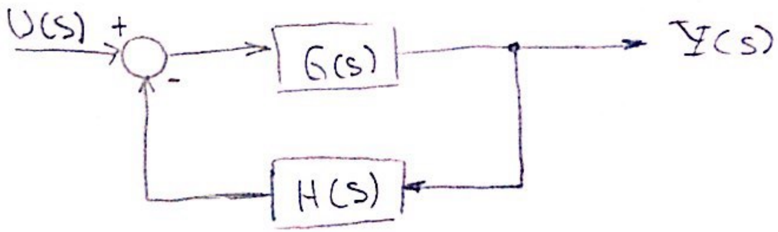
Alternativamente, substituindo (2) em (1):

$$sY(s) = -Y(s) + U(s)$$
$$Y(s) = \frac{1}{s}\left[-Y(s) + U(s)\right]$$



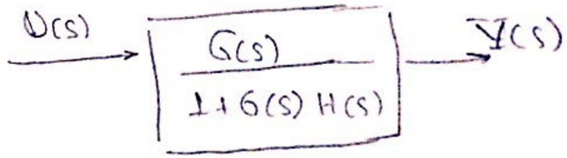
Transformada de Laplace da integração

• Equivalência entre diagramas de Blocos e função de tranferência.



É equivalente a:

$$Y(s) = G(s)\left[U(s) - H(s)Y(s)\right]$$
$$Y(s) + G(s)H(s)Y(s) = G(s)U(s)$$
$$Y(s)\left[1 + G(s)H(s)\right] = G(s)U(s)$$



Aula 4: Autovalores e Autovetores - Revisão

4) Soluções de Equações de estado

$$\dot{x} = Ax \quad , \quad x(0) = x_0$$

como resolver esta equação?

Se $A \in \mathbb{R}$ (ou seja, $A = a$), então

$$\dot{x} = ax \, , \, x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = e^{at} . x_0$$

E se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

$$\dot{x} = Ax \, , \, x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = e^{At} . x_0$$

Mas o que significa e^{At}?

$$f(\alpha) = e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \dots + \frac{\alpha^n t^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \alpha^k$$

$$\text{se } \alpha = A \Rightarrow e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

Ou seja, $\boxed{e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k}$

Com isso:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k =$$

$$\frac{d}{dt} \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)!} t^k A^k = \frac{d}{dt} \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} t^k A^k \right] = \right.$$

Generated by CamScanner

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k-1)!} t^{k-1} A^{k} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1} =$$

$$\boxed{A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} t^{l} A^{l}} \qquad c/\ l = k-1$$

ou seja, $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$

Problema: Esta caracterização de e^{At} envolve o cálculo de uma série infinita.

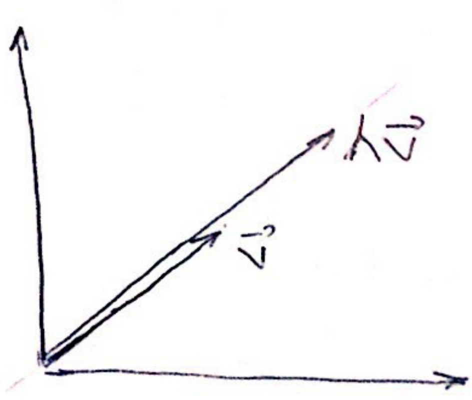
→ Alternativa: caracterização da resposta através dos autovalores e autovetores da matriz A.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de A e;

b) $v \in \mathbb{R}^n$ é autovetor de A associado a λ,

Então $\lambda v = Av$



sub-espaço invariante à transf. A

⇑

→ A direção do Autovetor v não é alterada pela aplicação da transformação linear A.

• Como calcular autovalores e autovetores?

⇒ obtenção direta via sistema linear

$$\lambda v = Av \Rightarrow \lambda v - Av = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)v = 0$$

Procedimento:

i) Calcular o polinômio característico de A

$$p(s) = \det(sI - A)$$

ii) Encontrar as raízes do polinômio característi.

$\lambda_i, i = 1, \dots, n.$ tais que

$$p(\lambda_i) = \det(\lambda_i I - A) = 0$$

iii) Montar o sistema linear

$$(\lambda_i I - A) = 0$$

iv) Encontrar v_i, $i = 1 \dots n$, tais que

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

Exemplo1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; (sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s-1)(s+1)$$

$$\det(sI - A) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow s = \lambda_1 = 1 \\ \searrow s = \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

p/ $\lambda_1 = 1$

$$(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ na prova posso calcular a partir deste passo na HP

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot v_{11} - 1 v_{12} = 0 \\ 0 v_{11} + 2 v_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{11} \neq 0 \text{ (p/ não gerar um vetor nulo)} \\ v_{12} = 0 \end{cases}$$

Escolhendo arbitrariamente $v_{11} = 1$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

p/ $\lambda_2 = -1$

$$(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2v_{21} - v_{22} = 0$

Escolhendo arbitrariamente $v_{21} = 1$

$-2 - v_{22} = 0 \Rightarrow v_{22} = -2$

Portanto,

$$\lambda_2 = -1 \quad ; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad (sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s+1)^2 + 1 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -1 + i \\ \lambda_2 = -1 - i \end{cases}$$

$\lambda_1 \rightarrow v_1 = [1 \quad -i]^T$

$\lambda_2 \rightarrow v_2 = [1 \quad i]^T$

PROVA

* como o autovalor é complexo o λ_2 é seu par conjugado (numa matriz 2x2)

(5) Solução de uma equação de estado linear

Seja $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$

A solução desse sistema pode ser escrita como

$$x(t) = c_i v_i e^{\lambda_i t}$$

Se E só se λ_1 é autovalor de A associado a v_1.

($\Rightarrow$) λ_1 é autovalor de A associado a v_1 (hip.)

$$x(t) = c_i v_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow \frac{d}{dt} x(t) = c_i v_i \lambda_i e^{\lambda_i t} = c_i (\lambda_i v_i).$$

$$e^{\lambda_i t} \overset{(hip)}{\Longrightarrow} \frac{d\,x(t)}{dt} = c_i A v_i e^{\lambda_i t} = A c_i v_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow \frac{d\,x_i(t)}{dt} = A x_i(t)$$

Resposta completa do sistema

$$\boxed{x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t}}$$

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$; $v_1 = [1 \quad 0]^T$

$\lambda_2 = -1$; $v_2 = [1 \quad -2]^T$

Resposta completa:

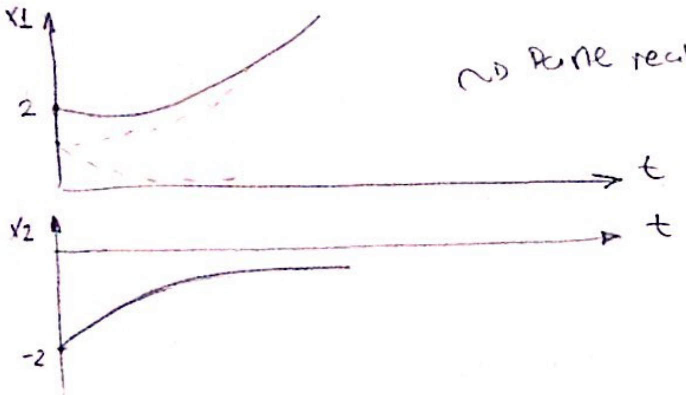
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Em $t=0$,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ -2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_2 = 1 \; ; \; c_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} + e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$



$\leadsto$ Parte real $\oplus$ $\Rightarrow$ instável

Interpretação geometrica

$\lambda_i \rightarrow$ modos de resposta

$v_i \rightarrow$ distribuição das modos de resposta através das variáveis de estado.

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1+i \; ; \; v_1 = [1 \;\; -i]^T$

$\lambda_2 = -1-i \; ; \; v_2 = [1 \;\; i]^T$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$$

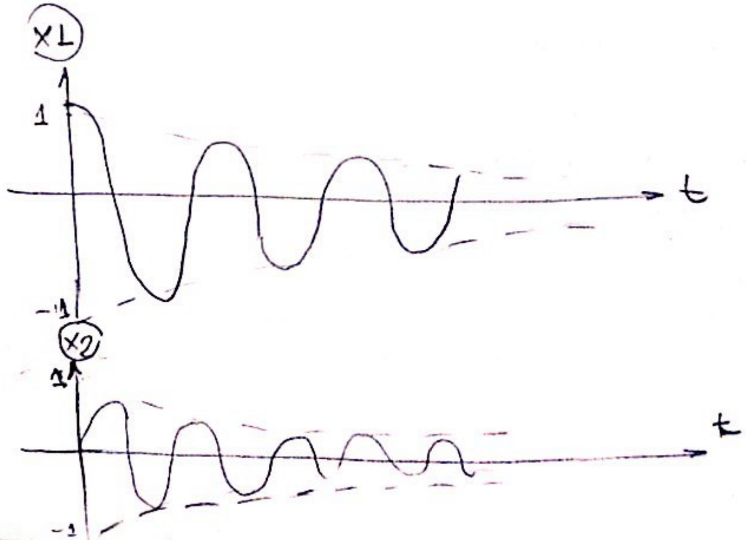
$c_1 = 1/2$

$c_2 = 1/2$

$\Rightarrow$ Estável, porque a parte real é negativa ou seja, tende zero e não a infinito. $\neq$ do outro exemplo

$$x_1(t) = \frac{1}{2} e^{(-1+i)t} + \frac{1}{2} e^{(-1-i)t} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-t} e^{-it} = e^{-t} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = e^{-t} \cos t$$



Portanto, se

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$$

Então, $\sigma_I \rightarrow$ Taxa de decaimento

$\omega_i \rightarrow$ frequência de oscilação

Define-se ainda,

$\zeta_i \rightarrow$ Taxa de amortecimento.

↳ "zeta"

$$\boxed{\zeta_i = \frac{-\sigma_i}{|\lambda_i|} = \frac{-\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}}}$$

Indicação do quanto o sistema está satisfatoriamente amortecido ou não. (ZETA

Aula 6 - Resposta Completa do Sistema

Resposta Dinâmica do Sistema

Seja o sistema:

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad u(0) = 0 \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma)\, d\sigma$ é a solução da equação (1)

Generated by CamScanner

Portanto,

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)\,d\sigma + Du(t)$$

Resposta do sistema a condição inicial

Efeito da entrada sobre a variação temporal do estado (que se reflete na saída)

Efeito da entrada sobre a saída

Demonstração:

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\sigma}Bu(\sigma)\,d\sigma$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ae^{At}x_0 + Ae^{At}\int_0^t e^{-A\sigma}Bu(\sigma)\,d\sigma + e^{At}\left[e^{-At}Bu(t) - e^{A0}Bu(0)\right]$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = A\left\{e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)\,d\sigma\right\} + e^{A(t-t)}Bu(t) - e^{At}\underbrace{\cancel{Bu(0)}}_{0}$$

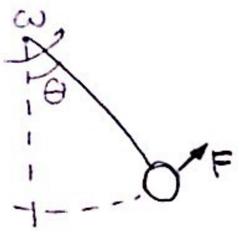
$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)}$$

Observações:

i) Entrada $u(t)$ pode alterar a dinâmica (variação temporal) do estado $x(t)$. (Noção Básica de controlabilidade).

ii) saída $y(t)$ pode ser usada para determinar o estado $x(t)$ (noção básica de observabilidade)

Aula 7 - simulação da Resposta de um sistema Dinâmico.



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -K_1 \operatorname{sen} x_1 - K_2 x_2 + K_3 u\end{bmatrix} \; ; \; x(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

$$\Delta x = A\Delta x + B\Delta u \; ; \; A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} ; \; \Delta x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$$

$$C = [1 \;\; 0] \; ; \; D = 0$$

Aula 8 - Observabilidade e trocabilidade

→ Definição: Rank (ou posto) de uma matriz M:

rank(M) $\triangleq$ maior número de linhas ou colunas as quais, tomadas com um conjunto de vetores, formam um conjunto L.I.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} ; \; \text{rank}(A) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix}3 & 0 & 3\\ 5 & 2 & 7\end{bmatrix} ; \; \text{rank}(B) = 2$$

$$C = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix} ; \; \text{rank}(C) = 1$$

$$D = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 10^{-50}\end{bmatrix} ; \; \text{rank}(D) = 2$$

→ Precisão Numérica usada pelo aplicativo de cálculo do Rank deve ser cuidadosamente monitorada

* Teorema de Cayley-Hamilton: "toda matriz é raiz de seu próprio polinômio característico".

$$\det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

$$\det(\lambda I - A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

$$A^n = -\alpha_0 I - \alpha_1 A - \dots - \alpha_{n-1} A$$

Observabilidade:

- Definição: Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad (1)$$

$$y = Cx \qquad (2)$$

→ O sistema (1), (2) é observável se o conhecimento da saída $y(t)$ do intervalo $[0, t]$ é suficiente para determinar o estado $x(0) = x_0$.

→ teste de observabilidade: O sistema (1).(2) é observável se e só se rank $(V_o) = n$, sendo

$$V_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Demonstração: $y(t)$ é analítica (completamente determinável a partir de um ponto se todas as suas derivadas são conhecidas)

se $x(0) = x_0 \Rightarrow y(t) = Ce^{At} x_0$. Então:

⇒

$$\dot{y} = CAe^{At}x_0$$

$$\ddot{y} = CA^2e^{At}x_0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^n} = CA^n e^{At}x_0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ce^{At} \\ CAe^{At} \\ CA^2e^{At} \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{At} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Como $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (tem n componentes a serem determinados) é necessário que existam n equações LI em

$$V_\infty(t) = \begin{bmatrix} Ce^{At} \\ CAe^{At} \\ CA^2e^{At} \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{At} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ em } t=0.\ V_\infty(0) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ CA^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Definimos:

$$V_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Então $\text{rank}(V_0) = \text{rank}(V_\infty(0))$

Assim, se $\text{rank}(V_0) = n$, então x_0 é unicamente determinável a partir de $y(t) \Rightarrow$ sist. observável exemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = [0 \quad 1]$$

$$V_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{rank}(V_O) = 1$$

⇒ sistema não observável

Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{rank}(V_O) = 2$$

⇒ sistema observável

<u>controlabilidade</u>

→ Definição: o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(0) = x_0$$

É controlável se existe uma entrada $u(t)$ definida no intervalo $[0, t_1]$ que leva o sistema de x_0 a qualquer $x(t_1)$ desejado no espaço de estados.

→ Teste de controlabilidade.

se $\text{rank}(U_C) = n$, sendo

$$U_C = [B \mid BA \mid BA^2 \mid \dots \mid BA^{n-1}]$$

então o sistema é controlável.
(1)

Aula 9 - Controle por realimentação de Estados

→ Teorema da dualidade

Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

$$y = Cx + Du \qquad (2)$$

O sistema dual (1)-(2) é dado por:

$$\dot{z} = A^T z + C^T \bar{u} \qquad (3)$$

$$\bar{y} = B^T z + D^T \bar{u} \qquad (4)$$

- Se o sistema (3), (4) é controlável, então o sistema (1), (2) é observável.
- Se o sistema (3), (4) é observável, então o sistema (1), (2) é controlável

→ Demonstração

se (1), (2) é observável, então $\text{rank}(V_O) = n$, sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e

$$V_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(V_O) = \text{rank}(V_O^T)$$

$$V_O^T = [C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, (A^T)^2 C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^T)^{n-1} C^T]$$

Construindo a matriz de controlabilidade $\bar{U}_C$ para o sistema (3), (4), observamos que $\bar{U}_C = V_O^T$

Portanto,

$$\text{rank}(\bar{U}_C) = n$$

Isso implica que o sistema (3) (4) é controlável

. Avaliação da controlabilidade e da observabilidade de (1) e (2) no MatLab:

i) Ajustar a precisão do comando rank(.) de acordo com o desejado;

ii) controlabilidade: usar os comandos

rank(ctrb(A,B))

iii) observabilidade: usar os comandos

rank(obsv(A,C))

→ Controlador com estrutura de Realimentação de estados (9)

seja,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

Um controlador com estrutura de realimentação de estados para o sistema (1) pode ser descrito por

$$u = Kx \quad (2)$$

Com isso,

$$\dot{x} = Ax + B(Kx) \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x \quad , \quad x(0) = x_0$$

Exemplo: Posicionamento de polos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-4 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s-1)(s-4) + 2 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 2 \\ \searrow \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

• Procedimento de Projeto

i) Escolher $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*$ (posições desejadas dos pólos do sistema em malha fechada, ou seja, dos pólos da matriz $A+BK$)

ii) Encontrar os elementos da matriz K tais que

$$\lambda_i(A+BK) = \lambda_i^* \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+K_1 & -1+K_2 \\ 2+K_1 & 4+K_2 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A-BK) = \begin{bmatrix} s-1-K_1 & 1-K_2 \\ -2-K_1 & s-4-K_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A-BK) = (s-1-K_1)(s-4-K_2) - (-2-K_1)(1-K_2) =$$

$$= s^2 - 5s + 6 - K_1 s - K_2 s + 5K_1 - K_2 = 0$$

Escolhendo $\lambda_1^* = -1$ e $\lambda_2^* = -2$:

a) $\lambda_1^* = -1$

$$(-1)^2 - 5(-1) + 6 - K_1(-1) - K_2(-1) + 5K_1 - K_2 =$$

$$= 1 + 5 + 6 + K_1 + \cancel{K_2} + 5K_1 - \cancel{K_2} =$$

$$= 6K_1 + 12 = 0 \Rightarrow K_1 = -2 \,//$$

b) $\lambda_2^* = -2$

$$(-2)^2 - 5(-2) + 6 - (-2)(-2) - K_2(-2) + 5(-2) - K_2 =$$

$$= 4 + 10 + 6 - 4 + 2K_2 - 10 - K_2 =$$

$$= K_2 + 6 = 0 \Rightarrow K_2 = -6 \,//$$

* Posicionamento de polos MATLAB:

P = [-1 2]

K = place (A, B, P)

Aula 10 - Estimadores de Estado e Realimentação de Saída

- Estimadores de Estado

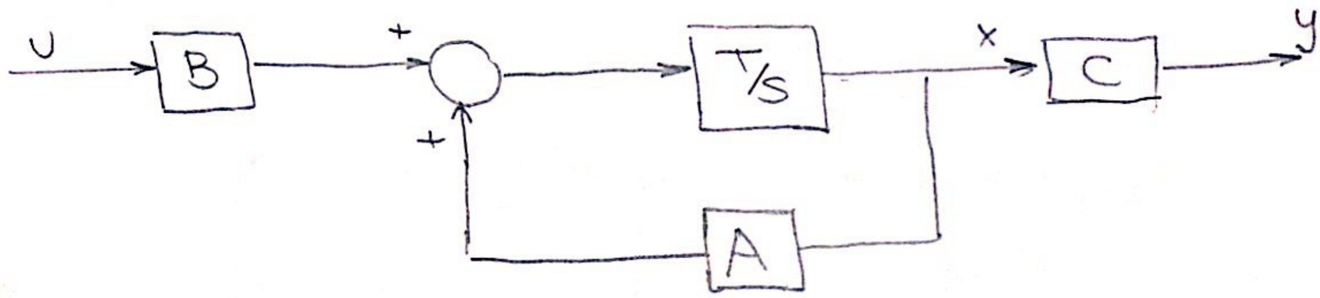
- Medição direta das variáveis de estado é usualmente difícil.

- Alternativa é a estimação de estados.

a) Estimador em malha aberta

Seja o sistema: $\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0 \quad (1)$

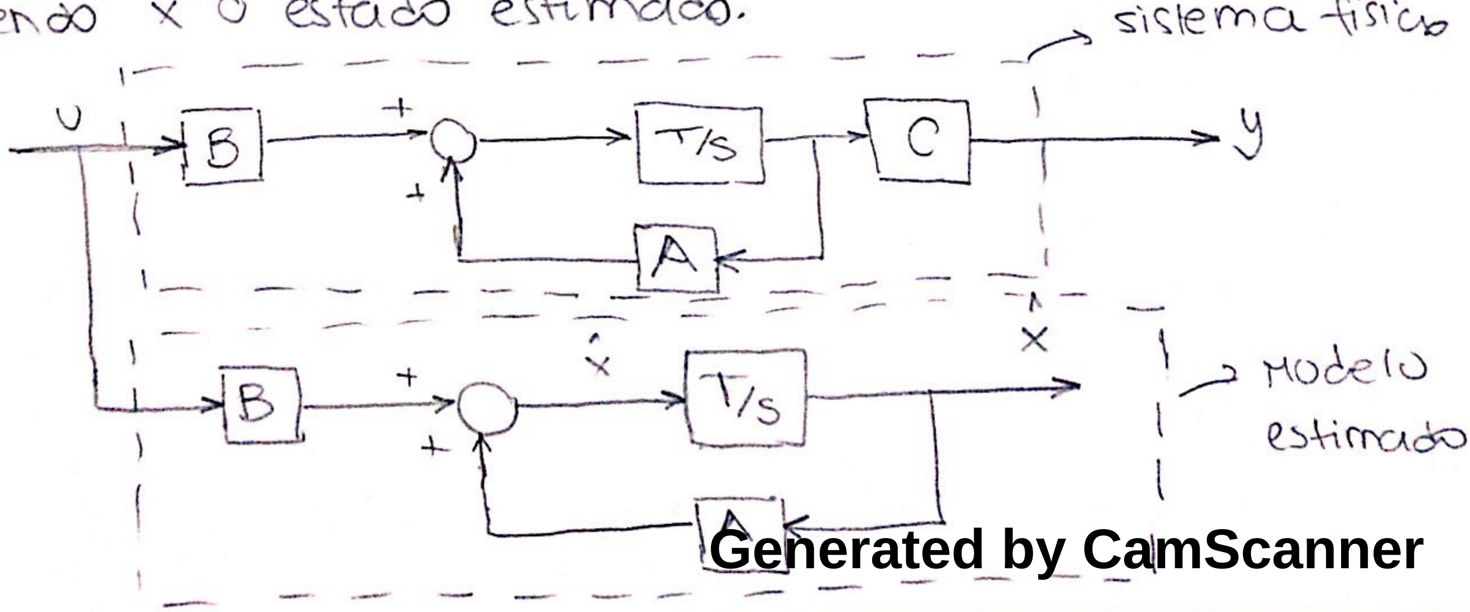
$y = Cx \quad (2)$



Conhecendo-se A e B, pode-se estimar o estado x através de:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \quad , \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad (3)$$

sendo $\hat{x}$ o estado estimado.



Desvantagem:

i) É necessário conhecer x_0 e fazer $\hat{x}_0 = x_0$;

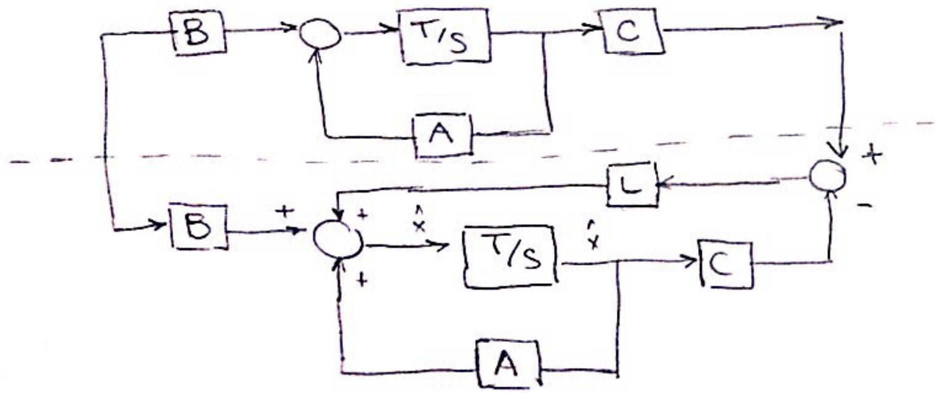
ii) Erro $\tilde{x} = \hat{x} - x$ é cumulativo ao longo do tempo

b) Observador com realimentação de saída:

• Saída y pode ser utilizada para melhorar o desempenho do estimador

• Erro entre a saída medida y e a saída estimada $C\hat{x}$ é incluído como um termo de correção na dinâmica do observador.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad , \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad (4)$$



Reescrevendo (4)

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu$$

Sendo $\tilde{x} = \hat{x} - x$ a definição do erro entre os estados estimados e real

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu - Ax - Bu$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\hat{x} - Ax + LCx$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\hat{x} - (A - LC)x$$

Portanto, $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$ (5)

vemos que a matriz $(A - LC)$ define a taxa de decaimento do erro entre o estado estimado e o estado real.

$L \to$ Matriz de ganho de realimentação de saída (variável de projeto).

* Procedimento de Projeto:

i) Escolher $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_n'$ (polos desejados para o estimador)

ii) Encontrar a matriz L tal que $\lambda_i(A - LC) = \lambda_i'$, $i = 1, \dots, n$

→ O projeto é análogo ao da matriz de ganhos de realimentação de estados K

→ K e L podem ser projetados de forma independente (princípio da separação)

→ Projetos de K e L guardam uma relação de dualidade entre si.

Se o sistema: $\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx$

é observável, então

$$\dot{z} = A^T z + C^T \bar{y}$$
$$\bar{u} = B^T z$$

é controlável.

Pode-se então projetar K tal que:

$$\lambda_i (A^T + C^T K) = \lambda_i' \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

No caso em que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$P = [\lambda_1' \;\; \lambda_2']$

$K = $ place (A^T, C^T, P)

Fazendo $\boxed{L = -K^T}$ → No Matlab $L = K^T$

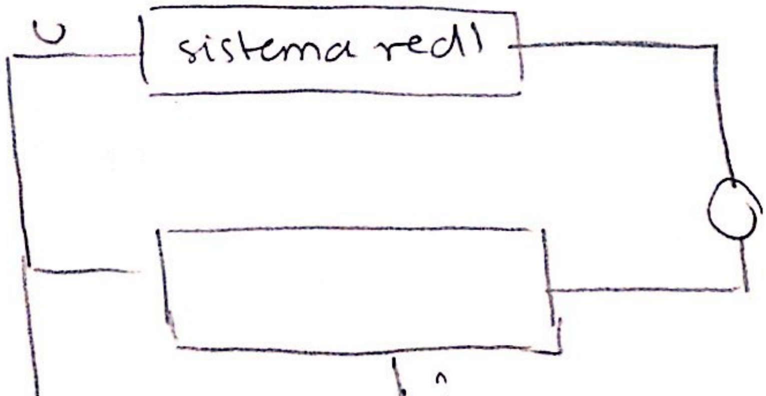
$$\lambda_i (A^T - C^T L^T) = \lambda_i [(A^T - C^T L^T)^T]$$

Transp. ñ altera os valores dos auto-vet

$$= \lambda_i [(A - LC)]$$

* L pode ser projetado por uma técnica de posicionamento de pólos.

* $u = K\hat{x}$ fecha a malha do controlador por realimentação de saída



P1

Aula 11 - Modelagem e análise de sistemas discretos (11)

- Controladores atuais são implementados em plataformas digitais (requerem conversão A/D e D/A);
- Sistemas digitais (entre outros) podem requerer uma modelagem no domínio do tempo discreto.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad (2)$$

- Este modelo corresponde a um par de equações de diferenças (análogo discreto das equações diferenciais)

Exemplo:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k)$$

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k-1) \\ x_2(k) = y(k-2) \end{cases}$$

$$x_2(k+1) = y(k-2+1) = y(k-1) = x_1(k)$$

$$x_1(k+1) = y(k-1+1) = y(k) \Rightarrow$$

$$x_1(k+1) = -a_1 x_1(k) - a_2 x_2(k) + b_0 u(k)$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

- Transformada de LAplace é aplicada a sistemas contínuos
- Análogo discreto é a transformada Z

$$Z\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k}$$

- z^{-1} representa um atraso "unitário" de tempo

$$Z\{f(k-1)\} = z^{-1} F(z)$$

- Pode-se obter um análogo discreto para a função de transferência

Exemplo:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k)$$

$$Z\{y(k)\} = Z\{-a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k)\}$$

$$Y(k) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) + b_0 U(z)$$

$$Y(z) = [1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}] = b_0 U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Relação entre as transformadas de Laplace e Z

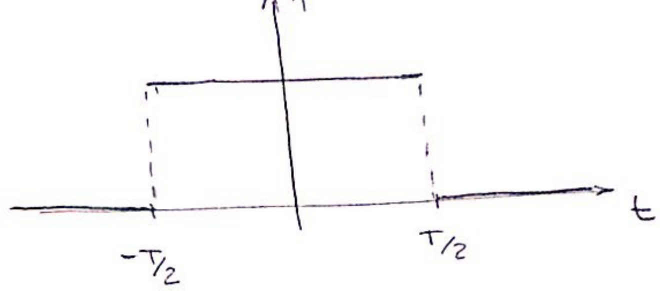
→ Série de Fourier: sinais periódicos contínuos

→ Transf Laplace: sinais aperiódicos contínuos

→ Como modelar sinais discretos (Amostrados) para a aplicação da transformada de Laplace?

→ Solução: utilizar funções impulso com atraso de tempo:

- Função Pulso: $fp(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & -T/2 \le t \le T/2 \\ 0, & t > \frac{T}{2} \text{ ou } t < -T/2 \end{cases}$



- Função impulso: $\delta(t) = \lim_{T \to 0} fp(t)$

- Função impulso c/ atraso de tempo: $\delta(t-1) = \lim_{T \to 0} fp(t-1)$

→ Função impulso com atraso de tempo pode ser usada para a amostragem de uma função contínua

$$g^*(t) = \int_0^t g(\tau)\, \delta(\tau - 1)\, d\tau$$

→ Transformada de LaPlace da função impulso com atraso de Tempo:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$$

→ Problema: termo exponencial introduz uma não linearidade no domínio S

→ Solução: usar uma mudança de variáveis: $\boxed{z = e^{s}}$

Com isso,

$$\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-s} = z^{-1} = Z\{\delta(t-1)\}$$

→ Implicações para a estabilidade do sistema dinâmico associado: