UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHRIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

2ª Lista de SEL0417 – Fundamentos de Controle

Professor: Rodrigo Andrade Ramos

Referência:

DORF, Richard D. Modelos em Variáveis de Estado. *In*: SISTEMA de Controle Modernos. 8. ed. [*S. l.*: *s. n.*], 1998. cap. 3.

NISE, Norman S. Modelagem no Domínio de Frequência. *In*: ENGENHARIA de Sistemas de Controle. 3. ed. [*S. l.*]: LTC, 2002. cap. 2.

FRANKLIN, Gene F. Resposta Dinâmica. *In*: SISTEMAS de Controle para Engenharia. 6. ed. [*S. l.*]: Bookman, 2013. cap. 3.

Questão 1

Suponha que um satélite de telecomunicações se movimente numa órbita não geoestacionária (i.e., que não tenha uma posição fixa com relação a um ponto sobre a superfície da Terra). Admitindo o movimento do satélite possa ser descrito, em coordenadas polares, como na Figura 1 (na qual a Terra é representada de maneira equivalente por uma massa concentrada em seu centro de massa), têm-se as seguintes equações para este movimento:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \cos\phi + r\dot{\phi}^2 - \frac{k}{r^2} \tag{1}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\tan\phi \tag{2}$$

$$\ddot{\phi} = -\dot{\theta}^2 \cos\phi \operatorname{sen}\phi - \frac{2\dot{r}\phi}{r} \tag{3}$$

sendo $k = r_0^3\omega_0^2$ e

- r => raio da órbita (distância do satélite até o centro de massa da Terra)
- θ => ângulo do satélite com relação a uma referência fixa na Terra
- ϕ => inclinação do satélite com relação ao Equador
- ω_0 => velocidade do satélite com relação a uma referência fixa na Terra
- r_0 => raio nominal da órbita desejada para o satélite

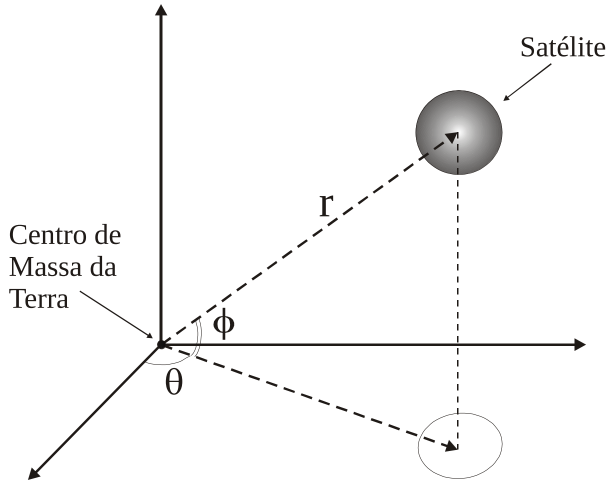

Figura 1: Descrição do movimento do satélite em coordenadas polares.

a) Defina um conjunto de estados e obtenha uma modelagem em espaço de estados não linear, do tipo $\dot{x} = f(x)$, para o movimento deste satélite;
b) Linearize a modelagem obtida em torno das condições de equilíbrio $r_e = r_0$, $\theta_e = \omega_0 t$ e $\phi_e = 0$ e apresente o modelo linear resultante.

Questão 2

Para o sistema mostrado na figura abaixo, considere que ambas as massas deslizam sobre uma superfície, sem atrito e k=1 N/M. Determine:

a) Calcule o ponto de equilibro do sistema;
b) Calcule a matriz jacobiana do modelo de estado em torno de a);
c) Apresente o modelo linearizado em espaço de estados;
d) Função de transferência $x_2(s)/F(s)$.

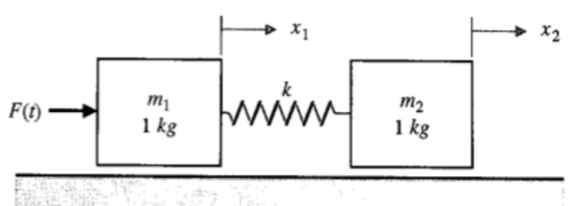

Figura 2: Sistema com duas massas.

Questão 3

Um robô apresenta uma flexibilidade significativa nos membros do braço com uma carga pesada na garra [6,21]. Um modelo de duas massas do robô está mostrado na Figura 3. Determine:

a) Calcule o ponto de equilibro do sistema;
b) Calcule a matriz jacobiana do modelo de estado em torno de a);
c) Apresente o modelo linearizado em espaço de estados;
d) Função de transferência $x_2(s)/F(s)$.

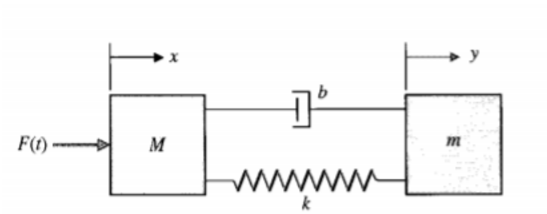

Figura 3: Modelo mola-massa-amortecedor de um braço robótico.

Questão 4

Um sistema com duas massas está mostrado na Figura 4 com uma força de entrada $u(t)$. Quando $m_1 = m_2 = 1$ e $K_1 = K_2 = 1$, achar o conjunto de equações diferenciais que descrevem o sistema e a partir das equações apresente o modelo linearizado em espaço de estados.

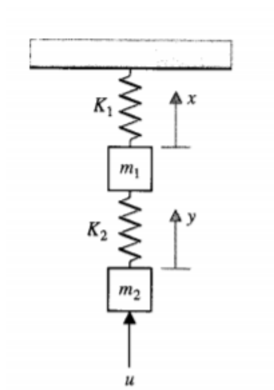

Figura 4: Sistema com duas massas.

Questão 5

O seguinte modelo descreve a dinâmica de um processo de infecção de seres humanos pelo vírus da AIDS:

$$\dot{T} = s - dT - \beta T v \tag{4}$$

$$\dot{T}^* = \beta T v - \mu_2 T^* \tag{5}$$

$$\dot{v} = kT^* - \mu_1 v \tag{6}$$

sendo

T => quantidade de células CD4+ saudáveis por mm^3 de sangue
T^* => quantidade de células CD4+ infectadas por mm^3 de sangue
v => quantidade de vírus livres (virions) por mm^3 de sangue

As células CD4+ saudáveis são produzidas a uma taxa constante s pelo organismo, e morrem naturalmente numa proporção d, com relação do número de células existentes. No indivíduo saudável, essa é a única dinâmica existente, representada pela equação (4) com $v = 0$. Após a infeção ($v \neq 0$ em $t = 0^+$, inicia-se a transformação de células CD4+ saudáveis em células infectadas, através da interação das células saudáveis com os virions, sendo essa dinâmica representada pela equação (5). Inicia-se também a produção de virions pelas células CD4+ infectadas, representada pela equação (6). A Figura 2 esquematiza esse processo de infecção.

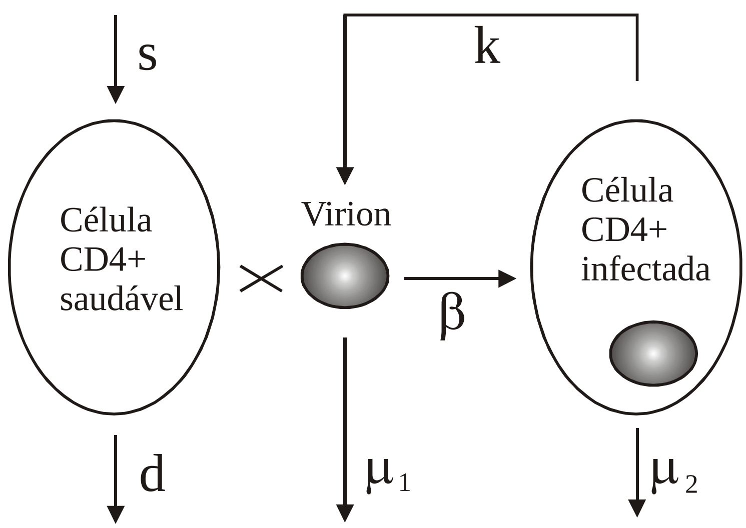

Figura 5: Representação do processo de infecção por HIV.

Parâmetros típicos deste modelo são (note que o tempo é medido em dias):

s => taxa de produção de células CD4+ saudáveis pelo organismo [10 células.$(mm^3.dia)^{-1}$]
d => taxa de mortalidade de células CD4+ saudáveis [0,02 dia^{-1}]
β => taxa de infectividade dos vírus livres [$2{,}4 \cdot 10^{-5}$ virions.$(mm^3.dia)^{-1}$]
μ_1 => taxa de mortalidade dos vírus livres [2,4 dia^{-1}]
μ_2 => taxa de mortalidade de células CD4+ infectadas [0,24 dia^{-1}]
k => taxa de vírus livres produzidos por célula CD4+ infectada [100 virions.$(célula)^{-1}$]

a) Calcule os pontos de equilíbrio do sistema descrito pelas equações (4), (5) e (6) e interprete o significado físico de cada um destes pontos;
b) Com os valores típicos fornecidos para os parâmetros, linearize o sistema em torno de cada um dos pontos de equilíbrio e apresente os modelos resultantes.

Questão 6

Considere o sistema massa-mola-amortecedor da Figura 3. Nesse sistema, temos:

M => massa
k => constante da mola
b => coeficiente de amortecimento
z => posição da massa
F => força externa

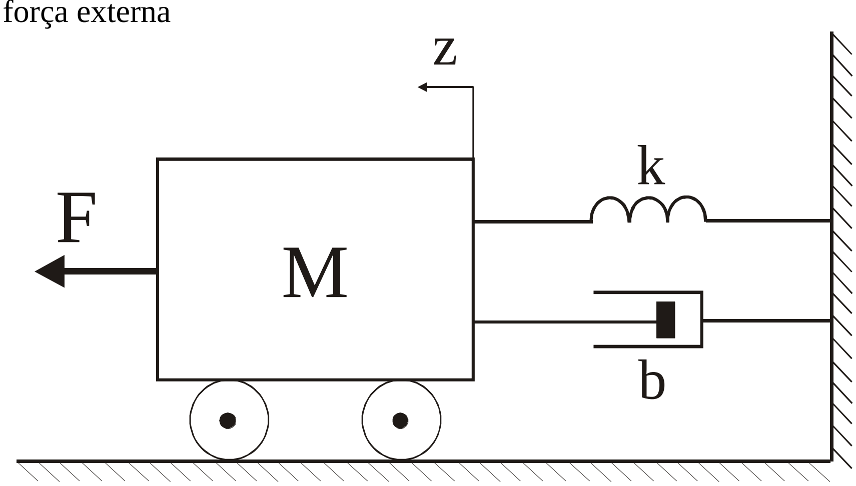

Figura 6: Sistema massa-mola-amortecedor.

Desprezando o atrito existente entre a massa e o solo, o movimento desta massa pode ser descrito pela seguinte equação diferencial:

$$M\ \ddot{z} + b\ \dot{z} + k\ z - F = 0 \tag{8}$$

Considere ainda que a mola não é perfeitamente elástica, sofrendo uma variação em sua constante que pode ser descrita por:

$$k = k_0 (1 - z^2) \tag{9}$$

Supondo que seja necessário controlar a posição da massa atuando a partir da força externa:

a) Obtenha um modelo em espaço de estado não linear para o sistema;
b) Calcule os pontos de equilíbrio deste sistema;

c) Escolha um dos pontos de equilíbrio obtidos e linearize o sistema em torno do ponto escolhido, apresentando o modelo linear resultante;
d) Calcule a função de transferência do modelo linearizado.

Questão 8

De maneira bastante simplificada, pode-se representar o funcionamento de um forno elétrico pelo seguinte modelo em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 250 \end{bmatrix} v \tag{10}$$

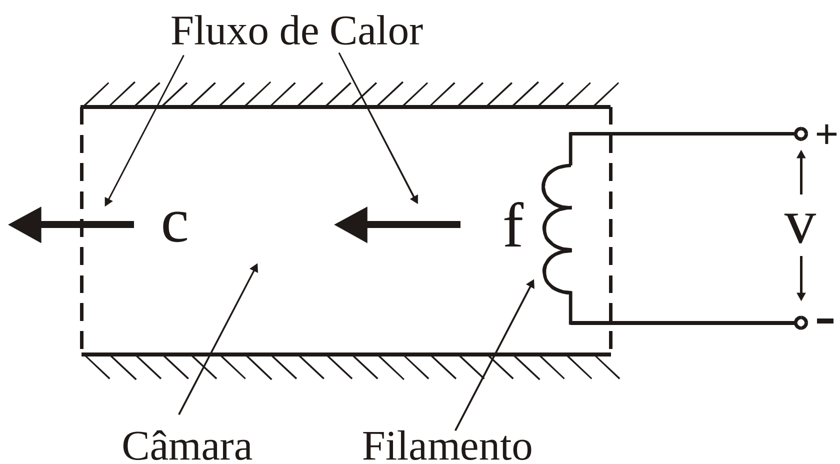

Figura 8: Diagrama esquemático do funcionamento do forno elétrico.

As variáveis nesse modelo representam as seguintes grandezas:

c => temperatura da câmara
f => temperatura do filamento
v => tensão de controle do forno

a) Supondo que o forno opere em regime, na condição $[c \quad f]^T = [c_0 \quad f_0]^T$, e que em $t = 0$ o a tensão de controle seja subitamente desligada, determine a equação que descreve a resposta do forno para $t \geq 0$;
b) Obtenha a equação diferencial de segunda ordem que descreve o funcionamento do forno, considerando a temperatura da câmara como saída e a tensão de controle como entrada;
c) Obtenha a função de transferência do forno a partir da equação obtida no item d), aplicando a transformada de Laplace;

d) Converta a equação em espaço de estados (10) em sua respectiva função de transferência, a partir da fórmula $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$, e compare com a resposta do item e).

Questão 9

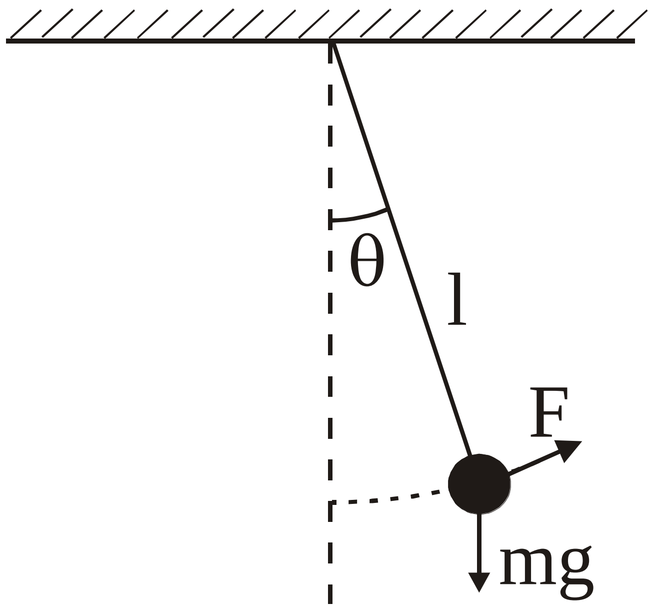

Figura 9: Pêndulo simples.

Conforme visto em aula, o movimento de um pêndulo simples obedece a uma equação que pode ser representada, na forma de espaço de estados, por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/ml \end{bmatrix} F \qquad (11)$$

no qual

θ => ângulo do pêndulo com relação à horizontal
ω => velocidade angular do pêndulo
F => força tangencial ao movimento do pêndulo

Os parâmetros para este modelo são:

g => aceleração da gravidade [10 m/s^2]
l => comprimento do pêndulo [1 m]
m => massa do pêndulo [0,1 kg]

a) Supondo que o pêndulo seja suspenso até a posição $\theta = \theta_0$, e que em $t = 0$ ele seja solto, iniciando uma dinâmica livre (ou seja, $F = 0$), determine a equação que descreve a resposta do pêndulo para $t \geq 0$;

b) Suponha agora que o pêndulo esteja em repouso na posição horizontal, e que no instante $t = 0$ seja aplicada ao mesmo uma força tangencial do tipo degrau com intensidade de 1 N. Utilizando o MATLAB, simule a reposta do pêndulo entre $0 \leq t \leq 1$s;

Questão 10

Suponha que um veículo seja acoplado a um trailer através de um sistema mola-amortecedor, conforme mostrado na Figura 10. Considere o veículo como entrada do modelo, representando-o apenas pela força que ele aplica no ponto de engate. Neste modelo, temos:

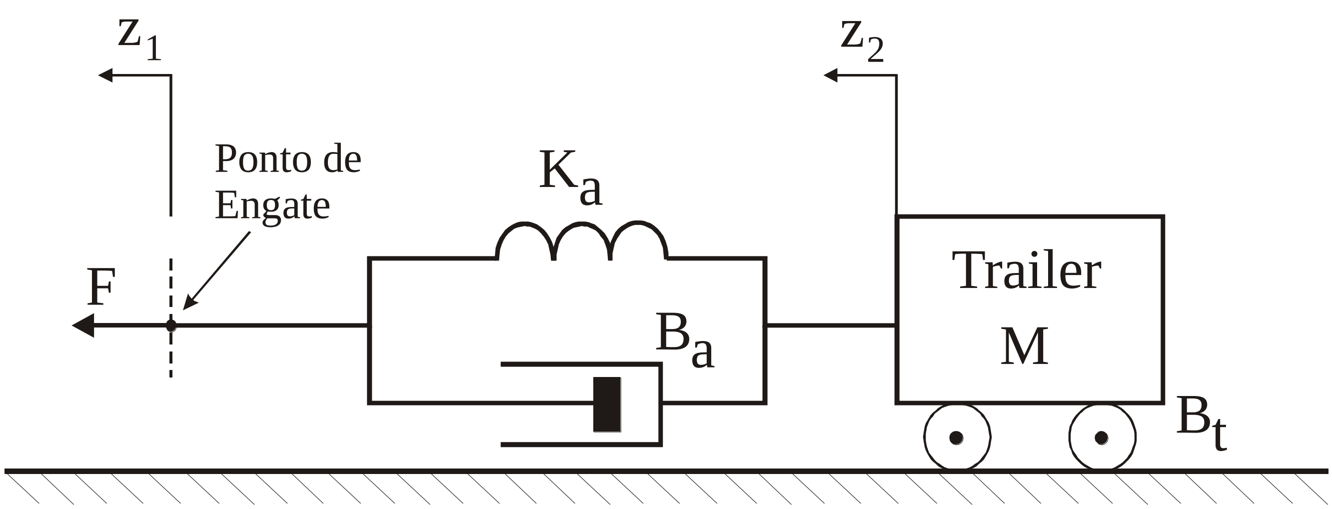

Figura 10: Modelagem do acoplamento entre o veículo e o trailer.

M	=> massa do trailer
K_a	=> constante de mola do acoplamento
B_a	=> constante de amortecimento do acoplamento
B_t	=> coeficiente de atrito viscoso do trailer com o chão
z_1	=> posição do ponto de engate
z_2	=> posição do trailer

O trailer se move pela ação resultante da diferença entre a força aplicada pelo veículo e as forças no sentido contrário aplicadas pela mola e pelo amortecedor. Considerando que o objetivo de controle sejam:

i) Manter a diferença entre as posições do ponto de engate e do trailer constante e;
ii) Manter a velocidade do trailer constante,

escreva a equação diferencial que rege o movimento do trailer e obtenha um modelo em espaço de estados para o mesmo, definindo as saídas de acordo com os objetivos de controle apresentados. Em seguida, calcule a matriz de funções de transferência deste modelo.

Questão 11

O sistema da Figura 11 representa parte de um processo químico industrial, no qual o fluxo de um determinado líquido, controlado a partir da válvula 1, se mistura com uma quantidade mínima de reagente (desprezível em termos de volume e, portanto, não representada na figura), fornecendo um produto intermediário que segue para o restante do processo através da válvula 2.

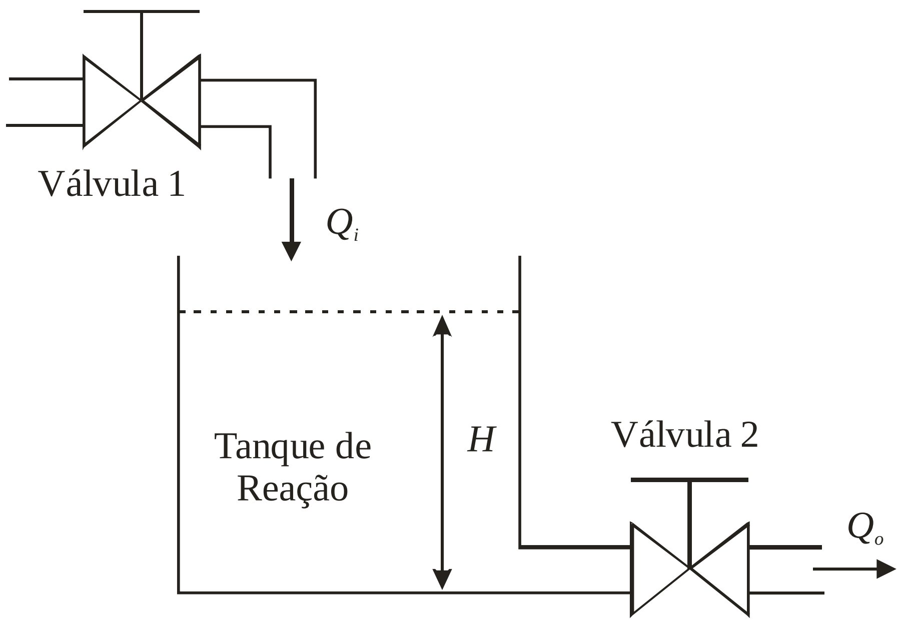

Figura 11: Processo químico industrial.

As variáveis descritas na Figura 11 são as seguintes:

Q_i => fluxo de entrada da substância controlado pela válvula 1;

Q_o => fluxo de saída do produto intermediário controlado pela válvula 2;

H => altura da coluna de líquido dentro do tanque de reação.

Ambas as válvulas apresentam comportamentos não lineares com relação aos respectivos comandos. A válvula 1 é acionada por um comando manual relacionado com sua abertura (medida pela posição de abertura P, com valor adimensionalizado). Além disso, para evitar que o fechamento brusco da válvula produza um efeito de golpe de aríete em sua tubulação, a mesma responde ao comando de maneira amortecida, sendo a equação que caracteriza esta resposta dada por

$$\frac{dQ_i}{dt} = -K_1 Q_i + K_2 \ln\left(P^2\right) \tag{1}$$

A válvula 2 é acionada automaticamente, por um comando que depende da altura da coluna de líquido no tanque, sendo seu comportamento dado por

$$Q_o = K_3 \sqrt{H} \tag{2}$$

Por sua vez, a altura da coluna de líquido no tanque depende dos fluxos de entrada e saída, comandados pelas válvulas 1 e 2, respectivamente, sendo seu comportamento caracterizado por

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q_i - Q_o}{C} \tag{3}$$

Sabendo que C = 2 m^2, K_1 = 1,3863 s^{-1}, K_2 = 1 m^3/s^2, K_3 = 0,3536 m^2/s, a altura máxima do tanque é de 10 m, as vazões máximas de entrada e saída são de 4 m^3/s, e que o operador deve comandar a válvula 1 de forma que a coluna de líquido no tanque permaneça constante com uma altura de 8 m, resolva os itens a) a d) a seguir.

a) Usando variáveis x_i para designar os estados, u para a entrada e y para a saída, construa um modelo em espaço de estados não linear para este sistema de controle de altura da coluna de líquido no processo industrial.
b) Calcule o ponto de equilíbrio deste modelo correspondente ao objetivo de controle descrito acima.
c) Linearize o modelo construído no item a) em torno do ponto de equilíbrio calculado no item b) e apresente o modelo linearizado em espaço de estados obtido.