SEL0417 - Fundamentos de Controle

Aula 06: Relação da FT com o Modelo de Espaço de Estados

Modelo em Espaço de Estados

- Suponha que:

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \qquad (1)$$

$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u \qquad (2)$$

descreve o sistema abaixo em torno de x_e:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)' \end{aligned} \qquad x(0) = x_0$$

Aplicando a Transformada de Laplace (TL)

- Considerando condições iniciais nulas $(x_0 = 0)$, aplicando a TL em (1):

$$\mathcal{L}[\Delta\dot{\mathrm{x}}] = \mathcal{L}[\mathrm{A}\Delta\mathrm{x}] + \mathcal{L}[\mathrm{B}\Delta\mathrm{u}] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathrm{s}\Delta\mathrm{X}(\mathrm{s}) = \mathrm{A}\Delta\mathrm{X}(\mathrm{s}) + \mathrm{B}\Delta\mathrm{U}(\mathrm{s}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathrm{s}\mathbf{I}\Delta\mathrm{X}(\mathrm{s}) - \mathrm{A}\Delta\mathrm{X}(\mathrm{s}) = \mathrm{B}\Delta\mathrm{U}(\mathrm{s}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathrm{A})\Delta\mathrm{X}(\mathrm{s}) = \mathrm{B}\Delta\mathrm{U}(\mathrm{s}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathrm{A})\Delta\mathrm{X}(\mathrm{s}) = (\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}\Delta\mathrm{U}(\mathrm{s}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta\mathrm{X}(\mathrm{s}) = (\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}\Delta\mathrm{U}(\mathrm{s}) \qquad (3)$$

Aplicando a Transformada de Laplace (TL)

- Agora, aplicando a TL em (2) e substituindo (3) na equação resultante:

$$\mathcal{L}[\Delta \mathrm{y}] = \mathcal{L}[\mathrm{C}\Delta \mathrm{x}] + \mathcal{L}[\mathrm{D}\Delta \mathrm{u}] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta \mathrm{Y}(\mathrm{s}) = \mathrm{C}\Delta \mathrm{X}(\mathrm{s}) + \mathrm{D}\Delta \mathrm{U}(\mathrm{s}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta \mathrm{Y}(\mathrm{s}) = \mathrm{C}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}\Delta \mathrm{U}(\mathrm{s}) + \mathrm{D}\Delta \mathrm{U}(\mathrm{s}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta \mathrm{Y}(\mathrm{s}) = [\mathrm{C}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B} + \mathrm{D}]\Delta \mathrm{U}(\mathrm{s})$$

Função de Transferência (FT) do Modelo

- Como a FT é da forma:

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)},$$

Temos que a FT do modelo linearizado é:

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D \qquad (4)$$

Exemplo 1: Pêndulo simples

- Modelo em espaço de estados do pêndulo:

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l}\cos(x_{1e}) & 0\end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{lm}\end{bmatrix}}^{B}\Delta u$$

$$\Delta y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D}\Delta u$$

Exemplo 1: Pêndulo simples

- Primeiro, para calcular a FT, é preciso calcular $(s\mathbf{I} - A)^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_{1e}) & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (s\mathbf{I} - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{l}\cos(x_{1e}) & s \end{bmatrix}$$

Exemplo 1: Pêndulo simples

- Primeiro, para calcular a FT, é preciso calcular $(s\mathbf{I} - A)^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$, Considerando a matriz numa forma genérica

$$(s\mathbf{I} - A)^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1: Pêndulo simples

- Portanto,

$$(\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathrm{A})^{-1}=\frac{1}{\mathrm{s}^2+\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}\cos(\mathrm{x}_{1\mathrm{e}})}\begin{bmatrix}\mathrm{s} & 1\\ -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}\cos(\mathrm{x}_{1\mathrm{e}}) & \mathrm{s}\end{bmatrix}$$

Exemplo 1: Pêndulo simples

- Agora, substituindo as expressões obtidas e as respectivas matrizes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ e D em (4):

$$\mathrm{G}(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}^2 + \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}\cos(\mathrm{x}_{1\mathrm{e}})} \begin{bmatrix} \mathrm{s} & 1 \\ -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}\cos(\mathrm{x}_{1\mathrm{e}}) & \mathrm{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mathrm{lm}} \end{bmatrix} + 0$$

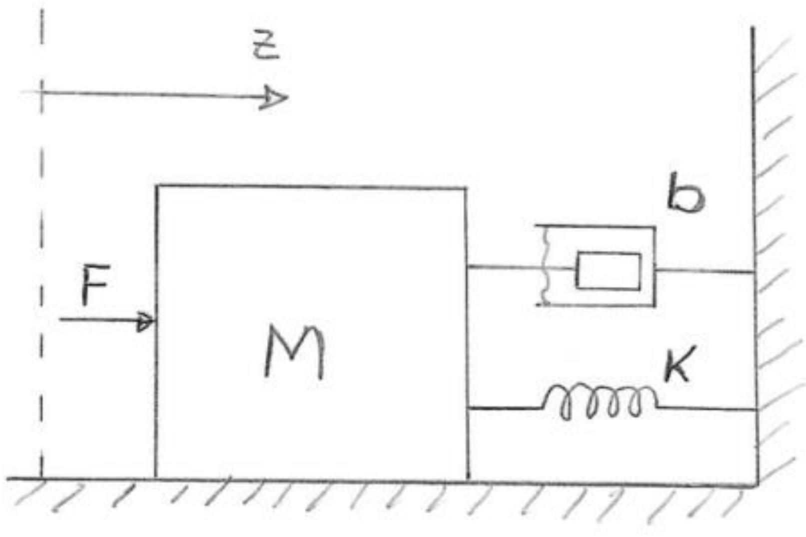
Exemplo 1: Pêndulo simples

- Assim, a FT do pêndulo simples é:

$$G(s) = \frac{1}{lms^2 + mg\cos(x_{1e})}$$

Exercício 2: Sistema massa-mola-amortecedor

- Dado o sistema massa-mola:



- Sendo que,

M → Massa

k → Constante da mola

b → Coeficiente de amortecimento

z → posição da massa (saída)

F → Força externa (entrada)

Exercício 2: Sistema massa-mola-amortecedor

- Não linearidade do sistema:

$$k = k_0(1 - z^2)$$

- Equação dinâmica:

$$M\ddot{z} = \sum_i F_i \Rightarrow M\ddot{z} = F - b\dot{z} - kz \Longrightarrow$$

$$M\ddot{z} + b\dot{z} + k_0(1 + z^2)z - F = 0$$

Exercício 2: Sistema massa-mola-amortecedor

- Pede-se:

a) Obter um modelo em espaço de estados não linear para o sistema.

b) Calcular os pontos de equilíbrio do sistema (pontos onde $\dot{x} = 0$).

c) Escolher um ponto de equilíbrio e linearizar o sistema, obtendo uma aproximação linear em espaço de estados.

d) Calcular a FT do modelo linearizado.