ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

SEL 0343 – Processamento Digital de Sinais

Notas de Aula

Prof. Dr. Emiliano R. Martins

1 – Introdução

O curso SEL0343 - Processamento Digital de Sinais é continuação do curso de Sinais e Sistemas. O principal objetivo do curso é familiarizar o aluno com as relações entre sinais e sistemas contínuos (analógicos) e sinais e sistemas discretos (digitais). A motivação do curso é óbvia: qualquer sinal que queira ser estudado ou processado em um computador tem quer ser digitalizado. Nesse curso, você irá aprender os fundamentos matemáticos que estabelecem a relação entre o sinal contínuo (sinal físico) e o sinal digitalizado. Portanto, qualquer situação prática que necessite o uso de computadores (ou seja, qualquer situação prática e ponto final) exige o conhecimento que será tratado nesse curso.

Como o curso de PDS depende desesperadamente do curso de Sinais e Sistemas, essas notas de aula vão começar com uma breve revisão dos tópicos mais importantes de Sinais e Sistemas. O aluno que se sentir inseguro em relação a esses tópicos pode utilizar a revisão como guia. Se você não sabe nada de Sinais e Sistemas, então é bom estudar esse assunto urgentemente (no mínimo os tópicos abordados na revisão dessas notas de aula).

2 – Revisão de Sinais e Sistemas

2.1 Sinais

Um sinal é, a priori, qualquer coisa que contém informação. Existem dois aspectos relevantes a sinais: o código contendo a informação e o meio onde ela propaga. Exemplos de códigos óbvios são: 1- linguagem, 2 - Morse, 3 - acendeu a fogueira no topo da montanha é porque Mordor está atacando. Exemplos de meios: 1 - fala, 2 - escrita, 3 - fibra ótica, 4 - ondas de rádio, 5 – fogueira e ar.

Neste curso não estamos preocupados nem com o código em si e nem com o meio. Estamos preocupados, por outro lado, com o sinal como um todo, ou seja, com o padrão (seja ele físico ou não) que contém a informação já codificada.

Um sinal físico é um padrão de alguma coisa física que varia em relação à alguma grandeza física. Por exemplo, um sinal de rádio é composto por variações de campo eletromagnético no tempo. Mas sinais podem ser variações no espaço também. Essas notas de aula são um sinal composto por variações de tinta (se for impresso) no espaço. Tradicionalmente, entretanto, supõe-se que o sinal seja uma função do tempo e estuda-se a teoria quase sempre supondo dependência temporal; afinal de contas, a teoria para sinais temporais é a mesma para sinais espaciais. Assim, vamos representar o sinal como sendo uma função do tempo *f*(*t*), onde o valor de *f* no tempo *t* corresponde ao valor da grandeza que carrega o sinal (por exemplo, o campo eletromagnético) nesse determinado instante de tempo *t*. Portanto o sinal *f*(*t*) contém o padrão que contém o código, que por sua vez contém a informação, que é transmitido pelo meio.

Exemplos são sempre bem elucidativos: suponha que tenhamos o seguinte código: valor alto representa nível alto de felicidade e valor baixo representa nível baixo de felicidade. Utilizando esse código, uma pessoa feliz irá enviar um sinal alto (seja lá o que for a grandeza física, mas podemos supor que seja um campo eletromagnético). Uma pessoa triste, irá enviar um sinal baixo. Então a informação que é transmitida é o estado de felicidade da pessoa. A **Figura *1*** mostra três sinais diferentes que foram gerados por três tipos de pessoas, cada uma com a sua própria percepção da existência, utilizando esse código. Lembre-se que o sinal *f*(*t*) depende tanto do código quanto da informação, mas não depende do meio (apenas a unidade de *f*(*t*) depende da grandeza física).

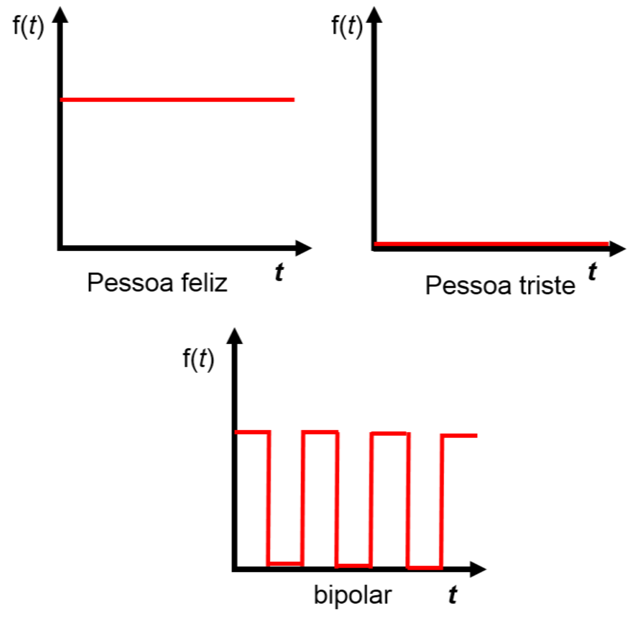


Figura 1 Três sinais diferentes utilizando o mesmo código (sinal alto = feliz, sinal baixo = triste).

Note que todos os sinais da **Figura *1*** são contínuos, ou seja, existe um valor de *f* para qualquer valor de *t*. Note também que os sinais da **Figura *1*** são binários, ou seja, o sinal admite apenas 2 valores (nesse caso alto ou baixo, ou seja, feliz ou triste). Neste exemplo, o sinal é binário porque o código é binário, mas não necessariamente porque a informação é binária (a pessoa muito feliz e a pessoa pouco feliz seriam representadas pelo mesmo sinal). Por outro lado, poderíamos ter um código mais elaborado onde a intensidade do sinal é proporcional ao grau de felicidade da pessoa, como na **Figura *2***. Note que apenas o bipolar envia um sinal binário, mas neste caso o sinal do bipolar é binário porque a informação que ele envia é binária e não porque o código é binário.

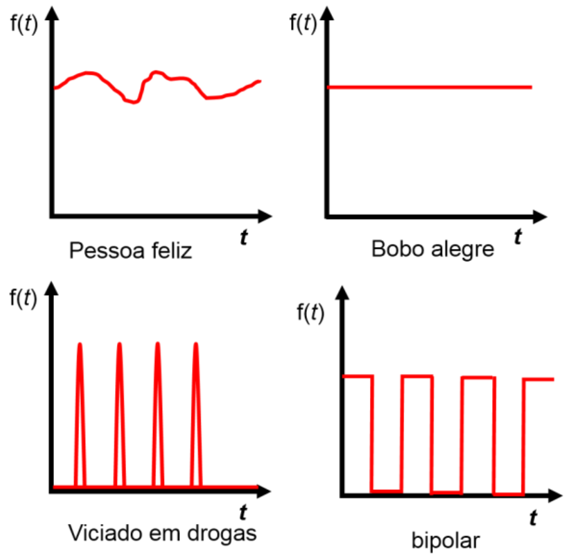


Figura 2

É importante enfatizar desde já que PDS não lida especificamente com sinais binários. Essa confusão (não muito rara) advém do fato de que computadores armazenam dados utilizando códigos binários. Mas a disciplina de PDS não trata de códigos binários em computadores. O que é realmente o assunto principal dessa disciplina é a relação entre um sinal contínuo e um sinal discreto. E o que é um sinal discreto? Um sinal discreto nada mais é que uma sequência de números. Portanto, PDS lida com sequências de números. E isso é relevante para análise computacional porque computadores não podem armazenar sinais contínuos, mas somente sinais discretos, ou seja, sequencias de números. Repetindo: nessa disciplina iremos tratar das propriedades matemáticas de sequências de números (mas a disciplina é muito mais interessante que essa última frase possa levar a crer). E, é claro, estaremos particularmente interessados em sequencias de números que foram geradas a partir de sinais contínuos pelo processo de amostragem. Um exemplo comum é música: em PDS, você vai estudar o que a sequência de números armazenada em um CD ou em um computador tem a ver com música em si.

Já que vamos tratar especificamente de sequências de números, é razoável estabelecermos uma notação que faça distinção entre um sinal contínuo (que para nós será uma função do tempo) e um sinal discreto. Um sinal discreto *f* (ou seja, uma sequência de números) será representada com a notação *f* [*n*], onde *n* é um número inteiro. Note que é o argumento da função que é um número inteiro, mas a função *f* pode admitir qualquer valor. Então o combinado é: se o argumento estiver entre colchetes, o sinal será discreto; se o argumento estiver entre parênteses, o sinal será contínuo.

Como dissemos anteriormente, um sinal discreto pode ser gerado a partir de amostras de um sinal contínuo. A **Figura *3*** mostra alguns exemplos de sinais discretos gerados de sinais contínuos. Apesar de nesse exemplo tanto *t* como *n* serem positivos, em geral tanto *t* como *n* podem adquirir valores negativos também.

Se o espaçamento entre amostras for *Ts*, então teremos a seguinte relação entre os sinais contínuos e discretos:

Equação 1

$$f[n] = f(nTs)$$

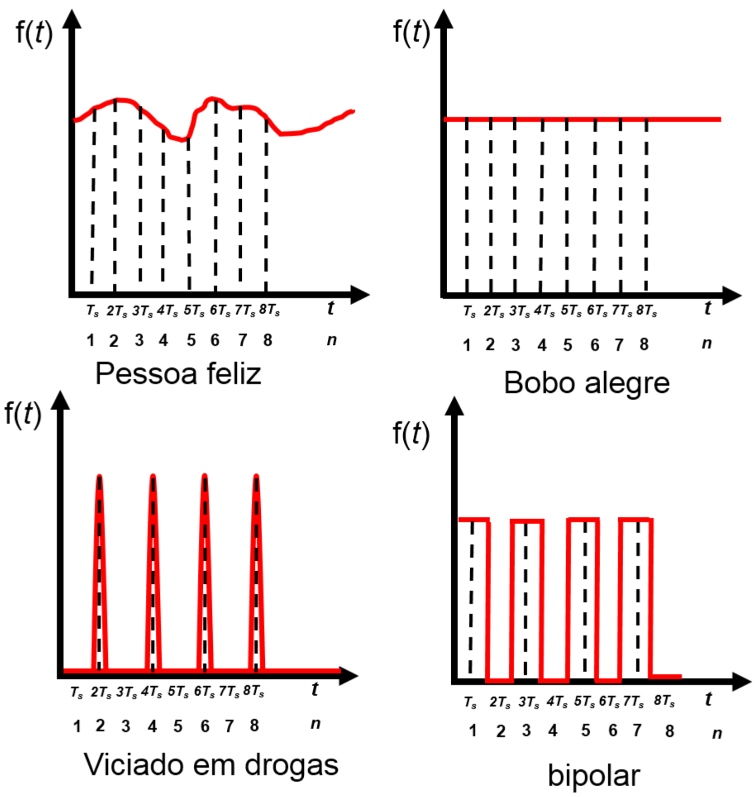


Figura 3 Exemplos de sinais discretos gerados de sinais contínuos

Vamos supor que você seja um médico monitorando o grau de felicidade dos seus pacientes e que você receba o sinal enviado por eles no seu computador. Dessa forma, você vai visualizar uma sequência de números que representa o sinal contínuo original. Vamos supor que uma intensidade do sinal em torno de 10 corresponda a uma pessoa feliz, em torno de 5 corresponda a um pessoa triste e abaixo de 5 já caracterize depressão. No exemplo da **Figura *3***, O sinal que você receber da pessoa feliz corresponde realmente à uma pessoa feliz. De fato, o sinal seria algo do tipo $f\,[1] = 9.5$, $f\,[2] = 9.8$, $f\,[3] = 9.5$, $f\,[4] = 9$, ... e por aí vai. Você, como médico, vai ficar tranquilo, pois o sinal do seu paciente feliz expressa que ele continua feliz. De maneira semelhante, o seu paciente excessivamente feliz (**Figura *3*** à direita e acima) continuará enviando um sinal que expressa a sua real condição emocional, que seria um sinal do tipo $f\,[1] = 10$, $f\,[2] = 10$, $f\,[3] = 10$, $f\,[4] = 10$, ... e por aí vai. Então estaria tudo certo com o bobo alegre também. Agora, a encrenca aparece quando comparamos os sinais enviados pelo dependente de drogas e pelo bipolar. Se o médico analisasse os sinais contínuos, ele poderia facilmente distinguir qual paciente é o drogado e qual é o bipolar. Só que com os sinais discretos ele não consegue mais, pois os sinais são praticamente idênticos. O que muda é somente a amplitude (o do drogado é um pouco mais alto) e a fase (o drogado envia primeiro um número baixo e depois um número alto, enquanto o bipolar envia primeiro um número alto e depois um número baixo). Fora isso, o sinal é praticamente o mesmo: um número alto o suficiente para caracterizar felicidade alta, seguido por zero (caracterizando depressão), seguido por número alto de novo e por aí vai. Como a fase por si só não tem significado físico (já que ela depende do tempo exato que o paciente começou a enviar o sinal), a única chance de o médico diferenciar os dois seria pela amplitude. Se, por outro lado, a amplitude for parecida para os dois, então não tem como o médico saber qual é qual, pois o padrão da informação é o mesmo para ambos (esse padrão será expresso pelo conteúdo espectral dos sinais, como veremos mais adiante). Esse é um exemplo de perda de informação por amostragem: o intervalo de amostragem Ts não é pequeno o suficiente para que o sinal discreto reproduza o contínuo. Uma das coisas mais importantes que um engenheiro (ou cientista em geral) tem que saber no contexto de sinais é como lidar com o problema da amostragem, ao qual voltaremos em breve.

Antes de passarmos para sistemas, uma palavra rápida sobre a forma de $f\,[n]$. De modo geral, $f\,[n]$ representa uma sequência de números qualquer. Assim, $f\,[n]$ pode ou não ter forma analítica. Isso fica claro no exemplo da **Figura *3***: enquanto o sinal da pessoa feliz não admite forma analítica, todos os outros 3 sinais poderiam ser representados analiticamente. Por exemplo, o bobo alegre teria a seguinte forma analítica:

Equação 2

$$f[n] = 10 \text{ para qualquer } n$$

Enquanto os sinais do drogado e bobo alegre seriam, respectivamente:

Equação 3

$$f[n] = 0 \quad para \quad n \quad ímpar$$
$$f[n] = 13 \quad para \quad n \quad par$$
$$e$$
$$f[n] = 11 \quad para \quad n \quad ímpar$$
$$f[n] = 0 \quad para \quad n \quad par$$

Um outro exemplo bastante comum e muito importante na análise de sinais é o sinal senoidal, que tem a forma geral:

Equação 4

$$f[n] = cos(\Omega n + \varphi)$$

Onde Ω e ϕ são a frequência e fase do sinal, respectivamente (lembre-se que apenas n tem que ser um número inteiro: tanto Ω e ϕ podem ser números reais). Falaremos mais de sinais senoidais no próximo capítulo.

2.2 – Sistemas

Um sistema é qualquer coisa que faz qualquer coisa em um sinal. Apesar de horrível, essa definição expressa bem o que é um sistema. Sistemas podem ser artificiais ou naturais, e podem destruir ou melhorar um sinal. Um filtro é um sistema artificial que melhora o sinal (na maior parte dos casos). O ar é um sistema natural que tende a piorar o sinal. Uma fibra ótica é um sistema artificial necessário para transmissão, mas cujo efeito no sinal é, em geral, maléfico.

Um sistema é representado matematicamente por um operador. Um operador, pasmem, é um objeto matemático que realiza uma operação. Por exemplo, poderíamos definir o operador *A{}* como sendo:

Equação 5

$$A\{\quad\} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Dessa forma, se tivermos uma função *f*(*x*), o resultado da operação de *A* em *f*(*x*) seria um sinal *y* correspondendo à derivada de *f* em relação à x:

Equação 6

$$y = A\{f(x)\} \quad = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Em engenharia elétrica, sistemas (ou, equivalentemente, operadores) costumam ser representados por caixinhas, explicitando a entrada e a saída do sistema. Se o sistema for representado por um operador $T\{\}$, podemos utilizar a seguinte representação:

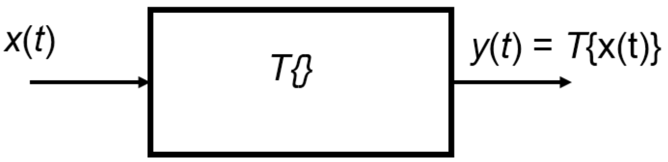


Figura 4 Representação de um sistema *T* operando sobre um sinal de entrada *x* e resultando em um sinal de saída *y*.

Sistemas podem ser classificados de acordo com algumas propriedades gerais. Como essas propriedades podem ser facilmente encontradas em qualquer livro de Sinais e Sistemas, eu vou revisar aqui apenas as três mais importantes.

Uma das propriedades mais importantes é a linearidade. Suponha que um sistema possua saída $g_1(t)$ e $g_2(t)$ para as entradas $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente, ou seja:

Equação 7

$$g_1(t) = T\{f_1(t)\}$$
$$g_2(t) = T\{f_2(t)\}$$

Nessas condições, dizemos que esse sistema é linear se, e somente se, a seguinte relação for obedecida:

Equação 8

$$T\{af_1(x) + bf_2(t)\} = ag_1(t) + bg_2(t)$$

Onde *a* e *b* são constantes (ou seja, números). Sistemas lineares são importantes por duas razões. A primeira razão é que vários sistemas tanto naturais como artificiais são lineares. A segunda razão é que eles são fáceis de manipular porque basta saber a resposta do sistema para determinadas funções base para que possamos prever o seu comportamento para uma função qualquer. Voltaremos a esse assunto mais adiante, quando tratarmos de sistemas lineares invariantes no tempo. A propósito, invariância temporal é outra propriedade de suma importância na análise de sistemas.

Para elucidar o conceito de invariância temporal, suponha novamente que um sistema $T\{\}$ possua saída $g(t)$ para uma entrada $f(t)$. Neste caso, se o sistema for invariante no tempo, então uma entrada $f(t - t_0)$ resultará na saída $g(t - t_0)$. Essa propriedade expressa o fato da saída não depender do tempo absoluto da entrada. Como exemplo, suponha que o sinal de entrada seja a ordem "*We shall fight on the beaches, we shall fight on the landing grounds*". Vamos supor também que o sistema seja um filtro que corte a última frase. Então a saída do sistema seria somente a frase "*We shall fight on the beaches*". Se o sistema for invariante no tempo, não importa a hora exata que você aplica o sinal no sistema, a saída será sempre o sinal "*We shall fight on the beaches*". Simples assim.

Apesar do conceito ser muitíssimo simples, alguns alunos se confundem com a representação matemática do conceito de invariância temporal. Por isso vou explicar a notação um pouco mais. Para visualizar como essa propriedade é expressa matematicamente, suponha que o tempo $t = 0$ corresponda às 0 horas do dia 4 de Junho de 1940 e que o sinal de entrada $f(t)$ contenha ao alerta "*We shall fight on the beaches, we shall fight on the landing grounds*" enunciado às 0 horas do dia 4 de Junho de 1940, ou seja, no tempo $t = 0$. Se eu plotar esse sinal de entrada $f(t)$ e o sinal de saída $g(t)$, teria algo com energia em torno de $t = 0$, como representado na **Figura *5***.

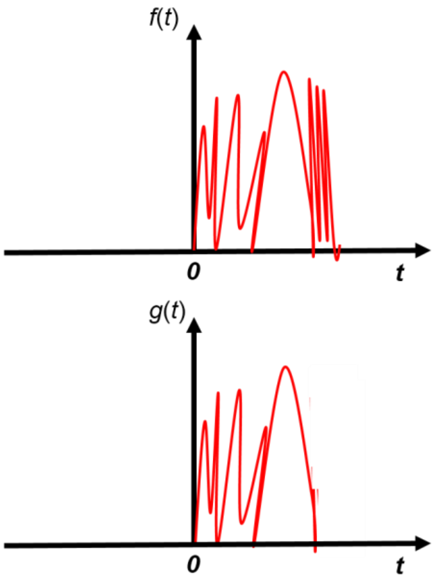


Figura 5

Mas vamos supor que eu precise do sinal de saída "*We shall fight on the beaches*" às 0 horas do dia 6 de Junho de 1944. O meu sinal de entrada continua sendo o alerta "*We shall fight on the beaches, we shall fight on the landing grounds*" e eu continuo querendo que o meu sinal de saída seja o alerta "*We shall fight on the beaches*". Vamos chamar as 0 horas do dia 6 de Junho de 1944 de tempo t_0 e vamos chamar o sinal de entrada dado no tempo t_0 de f_2(t). Qual a relação entre $f_2(t)$ e $f(t)$? Como é o mesmo sinal de alerta, apenas dado em tempos diferentes, obviamente que o sinal $f_2(t)$ é simplesmente uma versão atrasada de $f(t)$, ou seja:

Equação 9

$$f_2(t) = f(t - t_0)$$

Qual será a saída do sistema para a entrada $f_2(t)$? Depende: se o sistema for invariante no tempo, então a saída será a mesma que a do sinal original, apenas atrasada de t_0, ou seja, se o sistema for invariante no tempo, então:

$$g_2(t) = T\{f_2(t)\} = T\{f(t - t_0)\} = g(t - t_0)$$
$$onde$$
$$g(t) = T\{f(t)\}$$

No nosso exemplo, o sinal $g_2(t)$ vai ser, obviamente, o comando "*We shall fight on the beaches*" começando no tempo t_0. O sinais $f_2(t)$ e $g_2(t)$ estão representados na **Figura *5***.

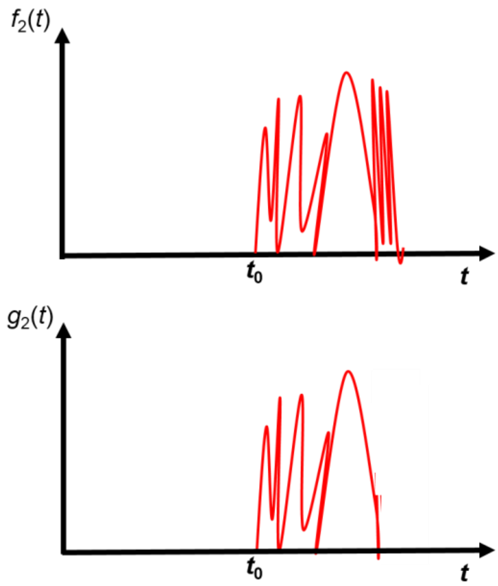


Figura 6

Você deve estar pensando que esse conceito é muito óbvio e que todo sistema deve ser invariante no tempo. Mas isso não é verdade. Por exemplo, você sabe que os parâmetros de transistores mudam quando eles aquecem, o que altera a resposta do sistema: a priori, o sistema em um dia quente tem uma resposta e em um dia frio outra resposta. Talvez você esteja pensando que mesmo assim esse conceito de dependência temporal é redundante, já que você poderia, por exemplo, tratar o circuito quente como um determinado sistema e o circuito frio como outro sistema, sem ter que apelar para um conceito que envolve o sistema alterando no tempo. Isso é apenas parcialmente verdade. Seria verdade se o sistema for fixo durante a operação no sinal; por exemplo, se a temperatura não alterar durante a passagem do sinal. Mas se o sistema mudar durante a passagem do sinal, torna-se necessário descreve-lo como um sistema **variante** no tempo. Uma fibra ótica, por exemplo, submetida a um pulso de luz muito forte, é um sistema **variante** no tempo porque o próprio pulso altera as propriedades óticas da fibra, que por sua vez alteram o pulso. Esse é um dos efeitos que limitam a velocidade de transmissão em fibras óticas e atrasa o download do seu "*Breaking Bad*" do fim de semana. Em todo caso, neste curso iremos focar em sistemas invariantes no tempo, ou seja, o sistema não muda enquanto o sinal está passando.

A última propriedade que quero revisar é a causalidade. A resposta de um sistema, em geral, depende do sinal como um todo. Para entender esse conceito, suponha novamente que temos uma entrada $f(t)$ e uma saída $g(t)$. Escolha um determinado tempo *to*. Em geral, a saída nesse tempo, ou seja, $g(t_0)$, depende de $f(t)$ como um todo, ou seja, de $f(t)$ para todos os valores de t, e não somente de $f(t_0)$. O caso particular em que $g(t_0)$ depende só de $f(t_0)$ é chamado de sistema instantâneo, mas esse é um caso especial. Agora um caso que é bem comum é quando $g(t_0)$ depende somente de $f(t)$ para $t \leq t_0$. Neste caso, o sinal $g(t_0)$ depende somente do sinal que já foi aplicado ao sistema (ou seja, do passado), mas não do sinal que ainda não foi aplicado (futuro). Esse tipo de sistema é chamado de causal e a razão pela qual essa é uma classe importante de sistemas é que todo sistema físico é causal. Não tem como a saída de um sistema físico depender do futuro. Esse é uma das noções mais básicas de física, e também bastante intuitiva.

Agora, você deve estar se perguntando, qual sistema seria então não – causal? Se o sistema for físico, a resposta é nenhum. Mas um sistema não necessariamente é físico. E isso é especialmente verdade em sistemas discretos. Afinal de contas, o que é um sistema discreto? É alguma coisa que opera em uma sequência de números. E o que significa operar uma sequência de números? Nada mais que alterar a sequência. Então, obviamente, um sistema discreto nada mais é que uma operação matemática arbitrária. Então um sistema discreto nada mais é que alguma coisa que você faz (provavelmente no computador) com uma sequência de números. E essa operação pode ou não representar uma operação física. Se não representa uma operação física, então não tem nada que te impeça de utilizar toda a sequência $f[n]$ para calcular um valor específico de $g[n_0]$. Em outras palavras, nada te impede de processar o sinal $f[n]$ utilizando um sistema não causal. Falaremos mais de causalidade para sistemas discretos mais adiante.

Então existem 3 propriedades que são especialmente importantes para nós: linearidade, invariância no tempo e causalidade. Antes de prosseguirmos com a revisão de Sinais e Sistemas, é válido resolver alguns exemplos para determinar se os sistemas possuem essas três propriedades. Eu já vou colocar a resposta para você conferir se acertou, mas tente sozinho(a):

Exemplos 1,2 e 3: Determine se os sistemas representados pelas operações abaixo são lineares, invariantes no tempo e causais:

1-

$$y(t) = T\{x(t)\} = x^2(t)$$

Resposta: o sistema é não-linear, causal e invariante no tempo.

2 -

$$y(t) = T\{x(t)\} = x(t) + x(t - t_0), \quad com \quad t_0 > 0$$

Resposta: o sistema é linear, causal e invariante no tempo.

3 –

$$y(t) = T\{x(t)\} = x(t) + x(t - t_0), \quad com \quad t_0 < 0$$

Resposta: o sistema é linear, não - causal e invariante no tempo.

4 –

$$y(t) = T\{x(t)\} = x(t) + t$$

Resposta: o sistema é não - linear, causal e variante no tempo.

2.3 Sistema Lineares Invariantes no Tempo (LTI)

Por definição, sistemas LTI são, simultaneamente, lineares e invariantes no tempo. Essa classe de sistemas, além de ser bastante comum na prática, é de especial interesse por permitir conclusões bem gerais sobre o comportamento dos sistemas. Na verdade, cursos de graduação em análise de sinais, na maioria das vezes, tratam apenas de sistemas LTI. Nessa seção vamos revisar os principais conceitos relacionados à análise de sistemas LTI. Esses conceitos são uma das ferramentas mais poderosas e úteis para engenheiros em geral (não somente engenheiros eletricistas).

Antes de começarmos a revisão envolvendo o tratamento matemático de sistemas LTI, é instrutivo entendermos qualitativamente o porquê da análise de sistemas LTI ser tão poderosa. A descrição do comportamento de sistemas LTI está intimamente conectada com a noção de base, que você estudou em álgebra. Se você ainda não entendeu o que é e para que serve o conceito de base em álgebra, então eu sugiro que você tente suprir essa lacuna conceitual, porque ela é de extrema importância em ciências exatas. Um cientista ou engenheiro que não sabe o que é base é equivalente a um músico que não sabe para que serve o dó ré mi fá.

Para entender o que o conceito de base tem a ver com sistemas LTI, vamos utilizar o exemplo mais simples que você aprendeu em álgebra: um sistema euclidiano em 2 dimensões. Imagine que você tenha um vetor qualquer no sistema euclidiano em 2 dimensões. Vamos chamar esse vetor de $\vec{a}$. Como você viu em álgebra, podemos descrever um vetor qualquer como uma soma de vetores unitários ortogonais. Então poderíamos escrever $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$, onde a_xe a_y são as coordenadas e $\hat{x}$e$\hat{y}$são os vetores unitários. Como qualquer vetor no espaço 2D pode ser expresso como uma soma entre os vetores unitários $\hat{x}$ e $\hat{y}$, dizemos que esses dois vetores unitários formam uma base para o espaço 2D. E por que se dar o trabalho de expressar o vetor $\vec{a}$ como uma soma de elementos da base? Por que isso é tão útil assim? Porque pense o seguinte: imagine que você esteja estudando uma transformação vetorial linear. Vamos chamar essa transformação linear de $T\{\}$. Essa transformação nada mais é que uma operação matemática que transforma um vetor em outro vetor. Em outras palavras, a transformação $T\{\}$ é um operador vetorial linear. Vamos dizer que você está tratando de um problema de eletrostática em 2 dimensões. Isso significa que você está estudando um campo elétrico 2D. O campo elétrico é um campo vetorial, ou seja, a cada ponto do espaço é associado um vetor. E agora você precisa saber o que vai ocorrer com esse campo elétrico quando você fizer a transformação $T\{\}$. Se você tivesse somente um vetor, você poderia simplesmente calcular qual vetor sairia da transformação $T\{\}$. Isso seria fácil e resolveria o seu problema. Mas você não tem um vetor: você tem um campo vetorial. Você tem muitos, muitos vetores (na verdade, infinitos vetores). Não dá para calcular o resultado da operação em cada um dos vetores. Então o que você faz? Você expressa o campo vetorial em uma determinada base e simplesmente calcula o resultado da transformação nos dois vetores base. Como o operador é linear, então a transformação em um vetor qualquer depende somente da transformação dos vetores base. Por exemplo, se sabemos $T\{\hat{x}\} = \hat{u}$ e $T\{\hat{y}\} = \hat{v}$, então já sabemos também qual é o resultado de $T\{\vec{a}\}$. De fato:

Equação 10

$$T\{\vec{a}\} = T\left\{a_x\hat{x} + a_y\hat{y}\right\} = a_xT\{\hat{x}\} + a_yT\{\hat{y}\} = a_x\hat{u} + a_y\hat{v}$$

Então, ao invés de calcular o resultado da transformação para todo o campo vetorial, tudo o que você que fazer é calcular a transformação para a base. Ao invés de fazer infinitas contas, você tem que fazer só duas: $T\{\hat{x}\}$ e $T\{\hat{y}\}$. Daí a imensa utilidade do conceito de base. Mas note que essa utilidade está intimamente ligada com operações lineares. De fato, se $T\{\}$ não for um operador linear, a **Equação *10*** estaria errada. Por isso que o nome do curso onde você aprende isso é Álgebra Linear, e não só Álgebra.

E o que essa história tem a ver com o nosso sistema LTI? Tudo a ver. O fato é que sinais são funções e funções são objetos algébricos, assim como vetores (se forem bem comportadas, ou seja, sem nada muito bizarro como descontinuidades). O que eu quero dizer com isso é que funções podem ser expressas como um somatório (ou integral) de funções base, assim como vetores podem ser expressos como uma soma de vetores base. O espaço algébrico onde "vivem" as funções tem até um nome específico. Enquanto o espaço de vetores é chamado de espaço euclidiano, o espaço de funções é chamado de espaço de Hilbert, em homenagem ao matemático alemão David Hilbert.

E quais são as funções base? Existem inúmeras, mas duas são de especial importância para nós. A primeira é a base formada por exponenciais complexas. Você já sabe que uma função $f(t)$ pode ser expressa como a soma de infinitas exponenciais complexas, da forma:

Equação 11

$$f(t) = \int F(\omega)\, exp(i\omega t)\, d\omega$$

Onde $F(\omega)$ é a Transformada de Fourier (TF) de $f(t)$ e a operação acima é a Transformada de Fourier Inversa (TFI). Portanto, a TFI de uma função nada mais é que uma decomposição vetorial: você está expressando $f(t)$ como uma soma de infinitas funções base da forma $\exp(i\omega t)$ (cada valor de ω determina uma única função base, como temos infinitos valores de ω, temos infinitas funções base). Note que $F(\omega)$ nada mais é que a coordenada da expansão, ou seja, a transformada $F(\omega)$ desempenha no espaço de Hilbert exatamente o mesmo papel que as coordenadas desempenham no espaço euclidiano. Note também que, como existem infinitas funções base $\exp(i\omega t)$, o espaço de Hilbert possui dimensão infinita.

E por que TFs são tão úteis na análise de sinais? Simples: pela mesma razão que bases são úteis no espaço euclidiano. Em outras palavras: porque se o sistema for linear, então tudo o que você precisa saber é a resposta do sistema para entradas da forma $\exp(i\omega t)$. Se você sabe a resposta do sistema para esse tipo de entrada, você sabe a resposta para qualquer entrada. No exemplo do campo vetorial 2D, precisei fazer apenas

2 transformações para determinar a transformação de qualquer vetor no espaço 2D; aqui, preciso determinar a resposta do sistema (ou seja, o resultado de uma transformação, ou operação) apenas para funções exponenciais. Isso basta para eu saber a resposta para uma função qualquer. Em termos matemáticos, se $T\{\}$ é linear e se

Equação 12

$$u(\omega,t) = T\{exp(i\omega t)\}$$

Então

Equação 13

$$T\{f(t)\} = T\left\{\int F(\omega)\, exp(i\omega t)\, d\omega\right\} = \int F(\omega) T\{exp(i\omega t)\}\, d\omega = \int F(\omega) u(\omega,t)\, d\omega$$

A **Equação *13*** é a versão da **Equação *10*** no espaço de Hilbert.

É possível, entretanto, deixar a **Equação *13*** em uma forma ainda mais simples e útil. Para isso, precisamos de uma segunda base de funções, tão importante como a base de Fourier. Essa é a base formada pela função impulso $\delta(t)$ (o nome mais utilizado para a função impulso é, na verdade, delta de Dirac, em homenagem ao físico inglês Paul Dirac – que foi quem uniu a teoria da relatividade à mecânica quântica). Você com certeza está familiarizado com fato de que um sinal $f(t)$ pode ser expresso como uma integral de funções impulso:

Equação 14

$$f(t) = \int f(t_0)\delta(t - t_0)\, dt_0$$

Nessa forma, a função $f(t)$ está expressa como uma soma (integral) de infinitas funções base $\delta(t - t_0)$, onde cada t_0 define uma única função base (note que a integral é sobre t_0, ou seja, estamos somando infinitas funções base, cada uma determinada por um valor diferente de t_0). Note também que agora as coordenadas vêm da própria função $f(t)$: cada base $\delta(t - t_0)$ possui coordenada $f(t_0)$.

Comparando a **Equação *13*** com a **Equação *14***, vemos que um sinal no domínio do tempo, $f(t)$, pode ser interpretado como sendo as coordenadas da função na base $\delta(t$ -

t_0), enquanto um sinal no domínio da frequência, $F(\omega)$, pode ser interpretado como sendo as coordenadas da função na base $exp(i\omega t)$. **Portanto a Transformada de Fourier nada mais é que uma mudança de base**.

Vamos supor novamente que temos um sistema LTI $T\{\}$ cuja entrada seja $f(t)$ e saída seja $g(t)$:

Equação 15

$$g(t) = T\{f(t)\}$$

Como o sistema é linear, vou expandir ele em uma base e estudar a operação do sistema em termos da operação na função base. Por enquanto, vou escolher a função impulso como base. Substituindo a **Equação *14*** na **Equação *15***, temos:

Equação 16

$$g(t) = T\{f(t)\} = T\left\{\int f(t_0)\delta(t - t_0)\, dt_0\right\}$$

Por enquanto não fiz nada demais, apenas expressei $f(t)$ na base da função impulso, o que pode ser feito independentemente do sistema; portanto, a **Equação *16*** vale para qualquer sistema. Por outro lado, se o sistema for linear, então a **Equação *16*** pode ser reescrita como:

Equação 17

$$g(t) = T\{f(t)\} = \int f(t_0) T\{\delta(t - t_0)\}\, dt_0$$

É muito importante você notar que a passagem da **Equação *16*** para a **Equação *17*** só é válida se $T\{\}$ for um sistema linear.

Talvez você não esteja muito confortável com a **Equação *17***. Talvez você esteja pensando que o certo seria eu ter escrito $g(t) = T\{f(t)\} = \int T\{f(t_0)\delta(t - t_0)\}\, dt_0$. Afinal de contas, que justificativa eu tenho de tirar o $f(t_0)$ para fora do operador, como eu fiz na **Equação *17***? A resposta é muito simples: lembre-se que o operador opera em funções do tempo t. Por exemplo, se eu tenho uma função do tipo $f(t) = af_2(t)$, onde a é uma constante, então obviamente $T\{ f(t)\} = T\{ af_2(t)\} = aT\{ f_2(t)\}$ (desde que $T\{\}$ seja linear, é claro). Acontece que quando fizemos a expansão da **Equação *14***, $f(t_0)$ passou a ser simplesmente a coordenada da função $\delta(t - t_0)$. As únicas coisas que dependem do tempo t no lado direito da **Equação *14*** são as funções $\delta(t - t_0)$. Cada $f(t_0)$ passa então a ser uma constante (ou seja, não depende de t) e a variável t_0 deve ser interpretada como sendo um índice, que diferencia as coordenadas das diversas funções $\delta(t - t_0)$ (do mesmo jeito que os subscritos x e y atuam como índices nas coordenadas a_x e a_y no espaço euclidiano,). A variável tempo é t, e não t_0. Portanto, para cada função base $\delta(t - t_0)$, temos uma coordenada fixa (ou seja, um número) $f(t_0)$, que desempenha o mesmo papel da constante a no exemplo $f(t) = af_2(t)$. Por isso é que posso tirar as coordenadas $f(t_0)$ do operador na **Equação *17***.

Então vamos voltar pra **Equação *17***. Agora, é claro, seria útil eu saber qual é o resultado da operação do sistema na base função impulso, ou seja, qual é resultado da operação $T\{\delta(t - t_0)\}$, já que isso me permitiria saber qual é o resultado de $T\{f(t)\}$ para qualquer $f(t)$. Vamos supor que a gente conheça o resultado da operação na função impulso centrada na origem. Vamos chamar esse resultado de $u(t)$. Em termos matemáticos, temos então, por definição, que:

Equação 18

$$u(t) = T\{\delta(t)\}$$

Agora, vamos supor que além de linear, o sistema também seja invariante no tempo (ou seja, vamos supor que o sistema seja LTI). Se o sistema é invariante no tempo então temos da **Equação *18*** que:

Equação 19

$$T\{\delta(t - t_0)\} = u(t - t_0)$$

É importante enfatizar novamente que a passagem da **Equação *18*** para a **Equação *19*** só é válida para sistemas invariantes no tempo. Combinando a **Equação *19*** com a **Equação *17***, temos finalmente que, para um sistema LTI:

Equação 20

$$g(t) = T\{f(t)\} = \int f(t_0) u(t - t_0)\, dt_0$$

O resultado da **Equação *20*** é estrondoso. Ela diz que tudo o que você precisa saber de um sistema LTI é a sua resposta ao impulso $u(t)$. Se você souber $u(t)$, você saberá qual é a resposta $g(t)$ para uma entrada $f(t)$ qualquer. Basta fazer a integral da **Equação *20*** para obter a sua resposta. Esse resultado é análogo ao problema da operação euclidiana expresso na **Equação *10***. A única diferença é que na **Equação *10*** precisamos fazer duas operações, uma em cada base. Por outro lado, no caso de sistemas LTI tudo o que precisamos fazer é uma única operação (a da **Equação *18***). Mas como pudemos nos reter à apenas uma única transformação no caso de sistemas LTI, se temos um espaço de dimensão infinita (ou seja, se temos infinitas funções base $\delta(t - t_0)$)? Não precisaríamos de infinitas operações, uma para cada base? De acordo com a **Equação *17*** a resposta é sim, a priori precisaríamos de infinitas operações, uma para cada base $\delta(t - t_0)$. Mas o truque é que se o sistema também for invariante no tempo, então basta saber a transformação para $\delta(t - t_0)$ com $t_0 = 0$ que já teremos automaticamente a resposta para todas as outras infinitas funções base com seus respectivos t_0 (e este fato é expresso matematicamente na **Equação *19***). Portanto, a invariância no tempo permitiu reduzir o trabalho de infinitas operações para apenas uma!!

Você já deve ter notado que a integral da **Equação *20*** é uma convolução. Para facilitar a notação, vamos utilizar o símbolo * para denotar convolução. Assim:

Equação 21

$$g(t) = T\{f(t)\} = f(t) * u(t)$$

Chegamos então no nosso primeiro resultado de fundamental importância: um sistema LTI é completamente caracterizado pela sua resposta ao impulso (e aqui estamos chamando a resposta ao impulso de $u(t)$). Agora podemos re-expressar esse resultado, mas no domínio da frequência. Para isso, basta aplicar a Transformada de Fourier em ambos os lados da **Equação *21***. Para facilitar a notação, vamos denotar a TF pelo operador *TF* []. A razão pela qual o argumento do operador da TF é diferente do argumento do operador do sistema (na TF é colchetes e no sistema é chaves), é que o sistema altera o sinal em si, enquanto a TF é apenas uma transformação na base matemática na qual estamos expressando o sinal (o sinal em si é o mesmo). Por isso é bom manter essa diferença de notação. Assim, se $G(\omega)$ é a TF de $g(t)$, então por definição temos que:

Equação 22

$$TF[g(t)] = G(\omega)$$

Lembrando que a convolução no domínio do tempo corresponde à multiplicação no domínio da frequência, temos que:

Equação 23

$$G(\omega) = TF[f(t) * u(t)] = F(\omega)H(\omega)$$

Onde $F(\omega)$ é a TF de $f(t)$ e $H(\omega)$ é a TF de $u(t)$. A **Equação *23*** é chamada de resposta em frequência do sistema.

Podemos deduzir várias coisas bem úteis da **Equação *23***. Primeiro note que, se para uma determinada frequência ω_0, tivermos que $F(\omega_0) = 0$, então necessariamente $G(\omega_0) = 0$ também. Isso significa que um sistema LTI não cria frequências: o espectro do sinal de saída só pode conter frequências que já estejam no espectro de entrada. Consequentemente, isso também significa que, se o sinal de entrada possuir apenas uma única frequência, então o sinal de saída só poderá ou ser zero, ou ser um sinal com a mesma única frequência (podendo mudar apenas a amplitude e a fase). Por isso que, se você colocar uma senóide na entrada de um sistema LTI, a saída é necessariamente uma senóide com a mesma frequência.

Apesar de já termos deduzido que a saída de uma entrada com frequência pura tem que ser necessariamente um sinal com a mesma frequência pura, é instrutivo provar esse fato formalmente, porque durante a prova vamos ter uma expressão que nos dá o significado físico de $H(\omega)$. A prova é muito simples. Vamos supor que a entrada seja um sinal com uma única frequência ω_0, ou seja:

Equação 24

$$f(t) = exp(i\omega_0 t)$$

Neste caso, temos então que:

Equação 25

$$F(\omega) = TF[f(t)] = TF[exp(i\omega_0 t)] = \delta(\omega - \omega_0)$$

Portanto, a TF da saída do sinal exponencial será:

Equação 26

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) = H(\omega)\delta(\omega - \omega_0)$$

Para sabermos qual é a forma desse sinal no tempo, basta calcularmos a TF inversa:

Equação 27

$$g(t) = \int G(\omega)\, exp(i\omega t)\, d\omega = \int \delta(\omega - \omega_0) H(\omega)\, exp(i\omega t)\, d\omega = H(\omega_0)\, exp(i\omega_0 t)$$

Expressando *H*(ω) em notação fasorial (*H*(ω) = | *H*(ω)|exp($i\phi$)), temos, finalmente que:

Equação 28

$$g(t) = T\{exp(i\omega_0 t)\} = |H(\omega_0)|\, exp\big(i\omega_0 t - \varphi(\omega_0)\big)$$

A **Equação *28*** fornece o significado físico de *H*(ω): o módulo de *H*(ω) é a atenuação (ou ganho, dependendo se for maior ou menor que um) do sistema na frequência *ω* e a fase de *H*(*ω*) é a defasagem que o sistema impõe nessa mesma frequência *ω*. Portanto, se você quiser medir o *H*(ω) de um determinado sistema, você pode fazer dois experimentos equivalentes. Você pode colocar uma função impulso no sistema, medir a saída e tirar a Transformada de Fourier da saída. Ou você pode colocar senóides na entrada e medir a atenuação e defasagem entre entrada e saída (neste último caso, você estaria determinando *H*(ω) frequência por frequência).

Esse é o fim da revisão de Sinais e Sistemas. Pelo menos a priori, todo o conteúdo coberto até aqui já deveria ter sido visto antes. De agora em diante vamos focar na análise de sinais discretos. O tratamento de sistemas discretos LTI é muito análogo ao de sistemas contínuos LTI e será tratado na parte final do curso.

3 – Sinais Discretos

3.1 Introdução

Começamos agora o curso de PDS propriamente dito, focando primeiro na análise de sinais discretos. Já falamos um pouco sobre sinais discretos no capítulo anterior, mas vamos repetir as definições aqui, caso o aluno que brilhou no curso de Sinais e Sistemas tenha optado por pular o capítulo 2.

O nosso foco é a análise espectral de sinais discretos. No caminho, iremos tropeçar no teorema da amostragem.

Como definido no capítulo 2, sinais discretos são sequências de números. Iremos utilizar o argumento do sinal entre colchetes para denotar que o sinal é discreto. Assim, a função $f[n]$, onde n é um número inteiro (podendo ser negativo) representa um sinal discreto.

Um sinal discreto pode ser definido analiticamente através de uma função explicita. Por exemplo, poderíamos definir um sinal $f[n]$ como:

Equação 29

$$f[n] = cos(0.1n) + n^2$$

Um sinal discreto pode também ser obtido de um sinal contínuo através da **Equação *1***. Por exemplo, considere o seguinte sinal contínuo e periódico $f(t)$:

Equação 30

$$f(t) = cos(\omega t)$$

Podemos extrair um sinal discreto desse sinal contínuo tomando amostras a cada intervalo T_S. Assim:

Equação 31

$$f[n] = f(nT_S) = cos(\omega nTs) = cos(\Omega n)$$

Onde

Equação 32

$$\Omega = \omega T_S$$

Note que Ω é adimensional.

Todo sinal amostrado é um sinal discreto, mas nem todo sinal discreto é um sinal amostrado: um sinal discreto pode ser uma sequência de números qualquer, obtida ou não de um sinal contínuo. Além disso, um sinal amostrado de um sinal periódico não é, necessariamente, periódico. Por exemplo, o sinal da **Equação *30*** é periódico independentemente do valor de ω. De fato, sempre existe um período $T = 2\pi/\omega$ tal que:

Equação 33

$$f(t) = f(t + T)$$

Por outro lado, isso não é necessariamente verdade para o sinal amostrado. De fato, para que o sinal amostrado possua período N (onde N é, claro, um número inteiro), é necessário que a seguinte condição seja satisfeita para todo n:

Equação 34

$$f[n] = f[n + N]$$

Portanto, da **Equação *31***, temos que ter que:

Equação 35

$$cos(\Omega n) = cos(\Omega n + \Omega N)$$

Mas

Equação 36

$$cos(\Omega n + \Omega N) = cos(\Omega n)\,cos(\Omega N) - sin(\Omega n)\,sin(\Omega N)$$

Portanto, para que a **Equação *35*** seja satisfeita, é necessário que as duas condições abaixo sejam satisfeitas simultaneamente:

Equação 37

$$cos(\Omega N) = 1 \quad e \quad sin(\Omega N) = 0$$

Obviamente, as condições da **Equação *37*** só serão satisfeitas quando o argumento ΩN for um múltiplo de 2π. Assim, $f[n]$ só será periódico se existir um número inteiro m tal que:

Equação 38

$$\Omega N = m2\pi$$

Assim, temos que a condição de periodicidade se reduz à condição:

Equação 39

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

Como m e N são números inteiros, a **Equação *39*** nos diz que o sinal amostrado só será periódico se a razão $\Omega/2\pi$ for um número racional. Isso não é sempre verdade e depende da relação entre a frequência do sinal contínuo e o período de amostragem. De fato, expressando o sinal contínuo em termos da frequência em Hertz ($f = 2\pi\omega$), a substituição da **Equação *32*** na **Equação *39*** leva à:

Equação 40

$$f \cdot T_s = \frac{m}{N}$$

Portanto se o produto $f\ T_s$ não for um número racional, o sinal amostrado não será periódico.

3.2 Representação de Fourier de Sinais Discretos

Vamos começar a tratar agora mais especificamente da análise espectral de sinais discretos. Como dissemos anteriormente, sinais discretos nada mais são que sequências de números. Por exemplo, a sequência 10.2, 3.9, 2.5 e 11.4 é um sinal discreto. Qualquer vetor que você defina no computador contém, em última análise, uma sequência de números e é, portanto, um sinal discreto. Assim, a própria definição do que é um sinal discreto já nos leva ao primeiro problema: como definir um espectro de frequências para uma sequência de números? Afinal de contas, a própria noção de frequência perde o sentido se não temos alguma coisa variando no tempo. Um sinal de frequência alta é um sinal que varia rápido e o conceito de rápido só faz sentido se estamos lidando com tempo. Mas um sinal discreto não tem tempo, é só uma sequência de números. Então o nosso primeiro problema é achar um jeito de estender o conceito de frequência para uma sequência de números.

Existem mais de uma maneira de abordar esse problema. O método que eu escolhi foi o que eu julgo ser mais intuitivo e mais conectado com os problemas práticos que engenheiros eletricistas têm que lidar. Esse método consiste em tratar primeiro especificamente de sinais amostrados e depois estender o resultado para uma sequência de números qualquer. Assim, a passagem de sinais contínuos para sinais discretos poderá ser feita de maneira mais suave.

Para elucidar as passagens que levam do sinal contínuo ao sinal amostrado, utilizaremos como exemplo a digitalização de um sinal de áudio. Suponha que você tenha um sinal elétrico que contenha um certo áudio. Vamos chamar esse sinal de $f(t)$. O sinal $f(t)$ representa uma grandeza física: no nosso exemplo $f(t)$ é o potencial elétrico (em Volts) no tempo t. Agora vamos supor que queremos gravar o áudio em um CD ou em um computador. Precisamos primeiro passar o sinal $f(t)$ por um conversor Analógico/Digital (A/D). O conversor é um circuito que capta amostras de $f(t)$. Vamos supor que o conversor A/D seja ultra-rápido, de maneira que possamos tratar a amostragem como instantânea. Vamos também supor que o intervalo de amostragem seja T_s e vamos chamar o sinal na saída do conversor de $f_d(t)$. O que é $f_d(t)$? Ou, mais especificamente, $f_d(t)$ é um sinal discreto? É muito importante entender que, formalmente, $f_d(t)$ **não é** um sinal discreto ainda. De fato, $f_d(t)$ ainda representa algo físico, que varia no tempo. Tanto $f(t)$ como $f_d(t)$ são sinais contínuos e representam volts variando no tempo. A diferença entre os dois sinais é que $f_d(t)$ é zero para todo $t \neq nT_s$, onde n é um número inteiro. Agora vamos supor que o sinal $f_d(t)$ entre em um computador, onde o valor de cada amostra (tomada no tempo $t = nT_s$) seja registrada em um vetor. Agora, nesse passo, nós perdemos a informação temporal. Tudo o que temos agora é uma sequência de números, que chamaremos de $f[n]$. Você que fez a digitalização sabe muito bem que $f[n]$ está relacionado ao sinal de áudio original através do período de amostragem (ou seja, você sabe que $f[n] = f(nT_s)$). Mas essa é uma informação que não está no sinal discreto $f[n]$. Se você enviar $f[n]$ por email para um amigo seu, tudo o que ele irá receber é uma sequência de números e, a não ser que você diga para ele qual valor de T_s você usou, ele nunca irá conseguir transformar essa sequência de números em música novamente. O processo como um todo está ilustrado na **Figura** *7*. Note que os sinais contínuos são representados na cor vermelha e o sinal discreto na cor preta. Note também que o eixo horizontal do sinal discreto não é mais t: o eixo horizontal agora é n e admite apenas números inteiros; de fato, o último gráfico da **Figura** *7* é só uma representação gráfica de uma sequência de números.

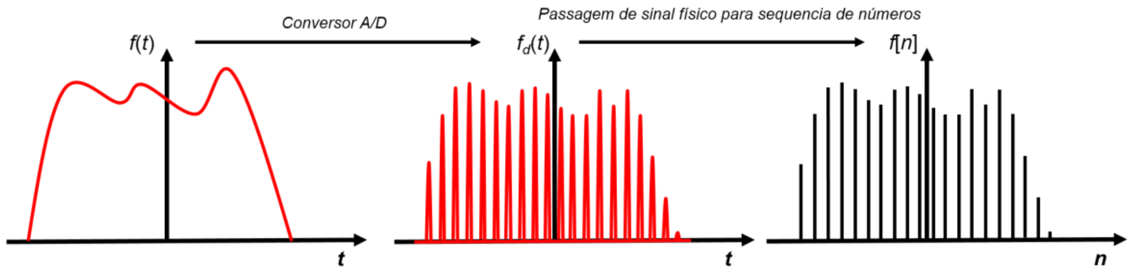


Figura 7

Apesar de $f_d(t)$ ainda ser um sinal contínuo, ele pode servir como transição entre o sinal $f(t)$ e a sequência $f[n]$. De fato, o sinal $f_d(t)$ é o sinal contínuo mais "parecido" com o sinal discreto: enquanto o sinal discreto só existe para valores inteiros de n, o sinal $f_d(t)$ só é diferente de zero para tempos $t = nT_s$. Esse fato motiva a nossa tática para definir uma representação de Fourier para $f[n]$. A tática é muito simples: vamos calcular a Transformada de Fourier (TF) para $f_d(t)$ e adaptar o resultado para uma sequência $f[n]$.

Na **Figura *7*** eu representei a função $f_d(t)$ como sendo formada por pulso rápidos. Matematicamente, os "pulsos rápidos" são descritos pela função trem de impulsos *TI*, que é definida como:

Equação 41

$$TI(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_s)$$

A função impulso $\delta(t)$ costuma ser representada graficamente por uma flecha. Adotando essa representação, a função $TI(t)$ será representada graficamente por uma sequência de flechas espaçadas por intervalos T_s. Como a função $f_d(t)$ é composta de uma sequência de funções impulsos moduladas pelo sinal $f(t)$, temos então que:

Equação 42

$$f_d(t) = f(t) \cdot TI(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_s)$$

A relação entre $f_d(t)$, $f(t)$ e $TI(t)$ está representada na **Figura *8***.

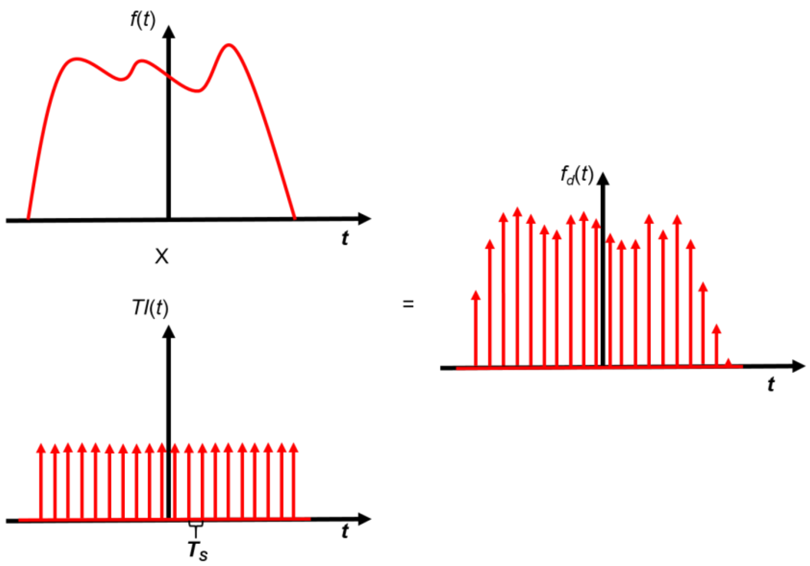


Figura 8

A ***Equação 42*** nos permite encontrar a TF de $f_d(t)$ (que é o que queremos agora) em termos do espectro de $f(t)$ (que é a informação do sinal original, antes de ser amostrado) e do espectro de $TI(t)$. Antes de calcularmos a TF, é útil deixar registrado qual par TF vamos utilizar ao longo do curso. Isso é mais ou menos uma questão de gosto. Como eu acho mais didático trabalhar sempre em Hertz, vamos utilizar as seguintes transformadas direta e inversa:

Equação 43

$$PAR \quad TF$$

$$TF \ Direta$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, exp(-i2\pi f t)\, dt$$

$$TF \ Inversa$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, exp(i2\pi f t)\, df$$

Em alguns casos, vamos utilizar a notação $TF[x(t)]$ para indicar a operação TF direta e a notação $TFI[X(f)]$ para indicar a TF inversa . Cuidado para não confundir o f do argumento de $X(f)$ com o f da função f(t); eles são coisas completamente diferentes: f em $X(f)$ simboliza frequência e f em f(t) é o sinal temporal.

Assim, temos que:

Equação 44

$$F_d(f) = TF[f_d(t)] = TF[f(t) \cdot TI(t)] = TF[f(t)] * TF[TI(t)]$$

Onde utilizamos a propriedade da TF que relaciona multiplicação no domínio do tempo com convolução no domínio da frequência (lembrando que * simboliza convolução).

A TF de $f(t)$ carrega a informação espectral do sinal original. Seguindo a notação que estamos utilizando, vamos chama-la de $F(f)$, ou seja:

Equação 45

$$F(f) = TF[f(t)]$$

A TF do trem de impulsos, por outro lado, pode ser calculada analiticamente utilizando a TF da função impulso. Se você não souber calculá-la sozinho, é bom que você procure o cálculo na internet (é muito fácil de achar). Como esse curso parte do princípio que você já tenha estudado TFs copiosamente, vou só colocar o resultado aqui:

Equação 46

$$TF[TI(t)] = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s)$$

Onde k é um número inteiro e f_s **é a frequência de amostragem**, relacionada ao período de amostragem por:

Equação 47

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

Portanto, a TF do trem de impulsos é um trem de impulsos no domínio da frequência. Substituindo a **Equação *46*** e **Equação *45*** na **Equação *44***:

Equação 48

$$F_d(f) = F(f) * \left[f_s \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(f - kf_s) \right]$$

A **Equação *48*** nos diz que a TF de $f_d(t)$ é formada por infinitas convoluções (ou seja, $F(f)$ é convoluído com cada uma das funções impulsos que constituem a soma entre colchetes). Lembre-se que, se tivermos duas funções $X(f)$ e $Y(f)$, então a convolução $Z(f)$ é:

Equação 49

$$Z(f) = X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\theta) Y(f - \theta)\, d\theta$$

Expressando a convolução na **Equação *48*** explicitamente, temos:

Equação 50

$$F_d(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) \left[f_s \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(f - kf_s - \theta) \right] d\theta = f_s \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)\, \delta(f - kf_s - \theta)\, d\theta$$

Como a integral envolve a função impulso, temos finalmente que:

Equação 51

$$F_d(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} F\,(f - kf_s)$$

Esqueça viagens místicas em busca do seu eu interior: a ***Equação 51*** é uma das coisas mais importantes que você vai aprender na vida. Então, observe bem o que essa equação está te contando. Ela te dá a relação entre o espectro do sinal amostrado $F_d(f)$ e o espectro do sinal original, $F(f)$. Mais precisamente, a ***Equação 51*** te diz que o espectro $F_d(f)$ é constituído de cópias do espectro de $F(f)$ espaçadas de f_s.

A **Figura *9*** ilustra a relação entre $F_d(f)$ e $F(f)$. Na **Figura *9a*** temos um esboço do espectro do sinal original e estamos supondo que o sinal original possui amplitude máxima A e também que a sua máxima frequência seja f_0. Podemos vislumbrar duas situações diferentes para $F_d(f)$. Na **Figura *9b*** estamos considerando uma situação onde a frequência de amostragem f_s é maior que o dobro de f_0. Neste caso, as cópias de $F(f)$ estão separadas, o que significa que a informação do espectro original foi mantida. De fato, a única diferença entre a cópia centrada em $f = 0$ da **Figura *9b*** e o espectro original de $F(f)$ na **Figura *9a*** é o fator f_s na amplitude do espectro. **Portanto, se $f_s \geq 2f_0$, então é possível recuperar o espectro $F(f)$ de $F_d(f)$.** Esse é o famigerado teorema da amostragem.

Se você não está pasmo(a), assustado(a) e maravilhado(a) com a frase em negrito do parágrafo anterior, então é porque você não entendeu a frase. Tente perceber o tanto que essa conclusão é contra-intuitiva. O que a frase em negrito está te dizendo é muito simples: se eu te der $F_d(f)$, você consegue deduzir o que é $F(f)$; mas como $F_d(f)$ e $F(f)$ são as Transformadas de Fourier de $f_d(t)$ e $f(t)$, isso significa que recuperar $F(f)$ de $F_d(f)$ é equivalente à recuperar $f(t)$ de $f_d(t)$. Portanto, o que a frase em negrito do parágrafo anterior está te dizendo é que é possível recuperar $f(t)$ de $f_d(t)$. Mas $f(t)$ é um sinal contínuo, enquanto $f_d(t)$, embora rigorosamente falando também seja um sinal contínuo, ele só é diferente de zero em intervalos bem definidos. Em outras palavras, $f(t)$ possui infinitas informações a mais que $f_d(t)$, já que $f_d(t)$ jogou fora toda a informação de $f(t)$ que estava entre os períodos de amostragem. Então como pode ser possível recuperar $f(\mathrm{t})$ de $f_d(t)$? Isso é maluquice. Como que o processo sabe que valores de $f(t)$ devem ser colocados nos intervalos entre as amostras? Como que podemos deduzir uma informação infinita (já que um sinal contínuo contém infinitos tempos t) de uma informação finita (já que um sinal discreto contém finitos tempos t diferentes de zero). Mas acabamos de mostrar que isso é sim possível. E, de passagem, já até ensinamos como fazer isso fisicamente: basta passar o sinal $f_d(t)$ por um filtro passa baixas para cortar as cópias no espectro de frequência. É claro que recuperar $f(t)$ de $f_d(t)$ consiste em fazer uma conversão Digital para Analógico. Portanto, um conversor D/A nada mais é que um filtro passa baixa.

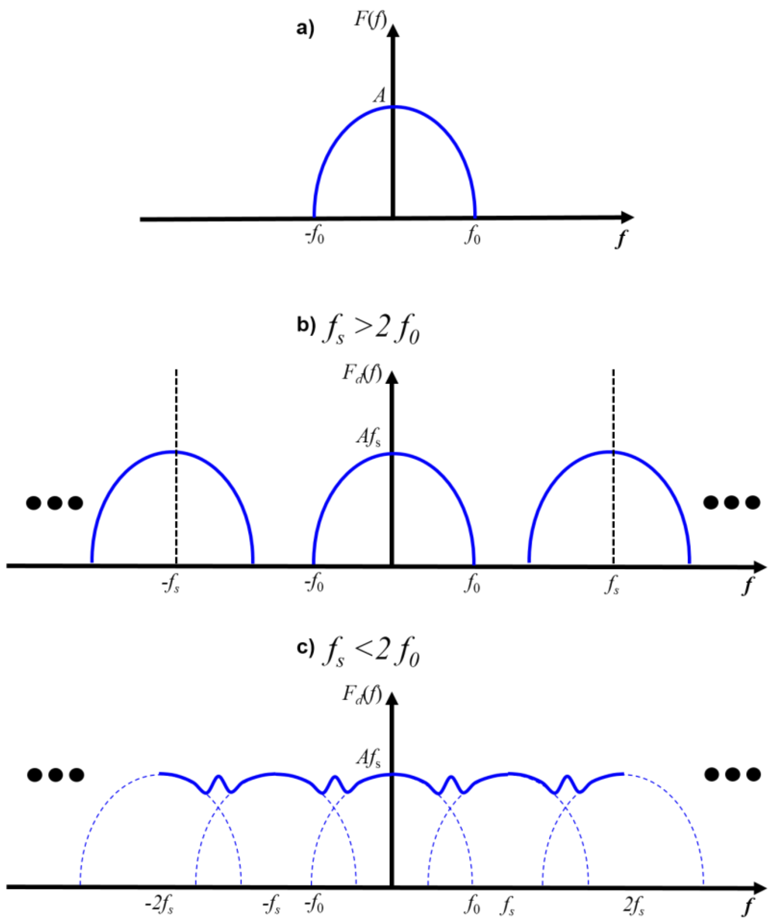


Figura 9

Obviamente nem sempre é possível executar a mágica de recuperar $F(f)$ de $F_d(f)$. Como ilustrado na **Figura 9*c***, se $f_s < 2f_0$, os espectros vão se sobrepor e as cópias originais (representadas pelas linhas pontilhadas) estarão perdidas para sempre. De fato, se eu te der o espectro resultante (linha sólida na **Figura 9*c***) não tem como você recuperar as cópias (linhas pontilhadas na **Figura 9*c***), pela mesma razão que se eu te contar que a soma entre dois números dá 5, não tem como você saber quais são esses dois números. Esse efeito de sobreposição espectral é chamado de *aliasing*.

Um último comentário sobre a forma de $F_d(f)$: como $F_d(f)$ consiste em infinitas cópias de $F(f)$, o espectro de $F_d(f)$ contém infinitas frequências. Mas esse é um resultado já esperado, uma vez que $F_d(f)$ é o espectro de um sinal formado por impulsos, e impulsos contém infinitas frequências.

Agora que já sabemos qual é a relação entre $F_d(f)$ e $F(f)$, eu faço a seguinte pergunta: qual é a relação entre $F_d(f)$ e as amostras no tempo (ou seja, qual é a relação entre $F_d(f)$ e as amostras de $f(t)$). Essa pergunta é particularmente útil para nós porque no fim das contas nós vamos trabalhar com as amostras de $f(t)$, então é útil encontrarmos uma expressão que nos permita calcular $F_d(f)$ diretamente de amostras de $f(t)$, sem ter que calcular $F(f)$ primeiro. Para encontrarmos uma relação entre $F_d(f)$ e amostras de $f(t)$, basta calcularmos $F_d(f)$ diretamente. Assim, temos que:

Equação 52

$$F_d(f) = TF[f_d(t)] = TF\left[f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_s)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_s)\right] exp(-i2\pi ft)\, dt$$

Re-arranjando:

Equação 53

$$F_d(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_s)\right] exp(-i2\pi ft)\, dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT_s)\, exp(-i2\pi ft)\, dt$$

Daí temos finalmente que:

Equação 54

$$F_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nT_s)\, exp(-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_s)$$

Essa expressão é particularmente interessante. Primeiro, lembre-se que ela é equivalente à **Equação *51***: a **Equação *51*** e a **Equação *54*** são maneiras diferentes de calcular a mesma coisa. Mas enquanto a **Equação *51*** nos ensina qual é a relação entre $F_d(f)$ e $F(f)$, a **Equação *54*** nos ensina a calcular $F_d(f)$ diretamente de amostras de $f(t)$, tomadas em intervalos T_s. E por que eu estou tão interessado assim nessa soma? Porque, no fim das contas, eu vou querer trabalhar com uma sequência de números. Lembre-se no exemplo do sinal de áudio (**Figura *7***) que quando eu gravar o sinal temporal $f_d(t)$, eu vou estar efetivamente criando uma sequência de números $f[n]$, que vão conter as amostras $f(nT_s)$ (ou seja, $f[n] = f(nT_s)$). Então, vamos supor novamente que eu te envie a sequência de números $f[n]$ por *email*. E vamos supor que você queira plotar o espectro de f(t). O que você faz? Primeiro, você tem que ter feito o curso de PDS para saber que é possível deduzir qual é o espectro de $f(t)$ do espectro de $f_d(t)$ (**Equação *51***). Na prática, você quase sempre está interessado no espectro de $f(t)$, só que os dados do computador vão te permitir calcular somente o espectro de $f_d(t)$. Assim, você tem que ter feito o curso de PDS para saber a priori a **Equação *51*** e assim conseguir deduzir $F(f)$ de $F_d(f)$. Sabendo a **Equação *51***, o seu problema se reduz à encontrar $F_d(f)$. E como encontrar $F_d(f)$? Simples, você me manda uma mensagem perguntando qual é o período de amostragem T_s e, uma vez que você sabe T_s, você escreve um código no *Matlab* para executar a soma da **Equação *54***. O que exatamente o código do *Matlab* tem que fazer? Primeiro você tem que definir um vetor de frequências f cobrindo uma certa região. A priori, você precisaria de um vetor infinito, já que $F_d(f)$ é uma função contínua. Mas como você não pode definir um vetor infinito, você define um vetor que seja grande o suficiente para conter alguns dos períodos de $F_d(f)$. Por exemplo, você poderia definir o vetor de frequências $\boldsymbol{f}$ começando em $f = -3f_S$ e terminando em $f = 3f_S$. Daí, para cada ponto do vetor $\boldsymbol{f}$ (ou seja, para cada valor de f) você teria que fazer um loop para calcular a soma da **Equação *54***, e o resultado da soma você armazenaria em um segundo vetor, que podemos chamar de $\boldsymbol{F_d}$. É claro que $\boldsymbol{F_d}$ terá o mesmo tamanho do vetor $\boldsymbol{f}$ e é claro que quando você plotar um pelo outro você terá um gráfico contendo o espectro do sinal $f_d(t)$. Pronto, você conseguiu calcular e plotar $F_d(f)$ no computador de maneira exata, e isso só foi possível porque a **Equação *54*** é uma soma, e não uma integral.

Mas agora vamos supor que eu seja meio lerdo (isso é, na verdade, mais uma descrição da realidade empírica do que uma suposição). Aí você está lá com o seu sinal $f[n]$, mas eu estou demorando uma eternidade para te contar qual é o valor de T_s. O que você faz? Você supõe $T_s = 1$ e faz o cálculo da **Equação *54*** e plota o espectro. É claro que o espectro que você tem não é exatamente o espectro de f_d(t), mas é quase: a única diferença é o eixo de frequências, que está escalonado. Quando eu te enviar o valor de T_s real, tudo o que você precisa fazer é multiplicar o vetor de frequências no *Matlab* por f_s para corrigir o espectro e pronto!! Você nem precisa recalcular $\boldsymbol{F_d}$. Explicitamente, tudo o que você precisa fazer é executar o comando $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}*f_s$ e pronto, está resolvido.

Vamos então lembrar o nosso problema original. Queremos encontrar um jeito de definir um espectro de frequências para uma sequência de números. Isso quer dizer que queremos encontrar uma operação que seja equivalente a TF, só que aplicada à uma sequência de números. Podemos ser práticos e pensar o seguinte: apesar de uma sequência de números não ter o eixo do tempo e, portanto, não ter como definir um espectro de frequências, eu posso supor que a minha sequência de números tenha sido gerada de um certo sinal temporal amostrado $f_d(t)$ e usar a soma da **Equação *54*** como sendo a definição da minha TF para sequencias de sinais. É uma boa ideia, já que a **Equação *54*** envolve apenas uma sequência de números e nos fornece uma interpretação física do resultado. Mas a minha ideia é bastante limitada pelo fato de que a **Equação *54*** envolve T_s explicitamente, mas T_s não é um valor que eu possa deduzir só da sequência de números. Então eu tomo uma atitude prática: eu DEFINO uma operação que corresponda à soma da **Equação *54***, mas com $T_s = 1$. Afinal de contas, como vimos no parágrafo anterior, o cálculo de $F_d(f)$ é facilmente corrigido quando eu estiver de posse do valor real de T_s: basta re-escalonar o eixo de frequências. Assim, vou definir a Transformada de Fourier para sinais discretos como sendo a seguinte operação:

Equação 55

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot n)$$

Essa operação é chamada de DTFT, do inglês *Discrete Time Fourier Transform*, que poderia ser traduzido simplesmente como Transformada de Fourier para sinais discretos. A **Equação *55*** passa a ser idêntica à **Equação *54*** se você fizer a substituição

Equação 56

$$\nu \rightarrow fT_s$$

Note que a DTFT é simplesmente um nome para uma operação definida por alguém. Por isso, não existe uma "dedução" para a DTFT do mesmo jeito que não existe uma prova matemática para o fato de uma maçã chamar maçã. Por isso, eu poderia muito bem ter começado esse capítulo com a **Equação *55***. Entretanto, o sujeito que definiu a DTFT fez isso por uma razão, e tudo o que eu fiz até aqui foi mostrar essa razão. Portanto, em momento nenhum eu "deduzi" a DTFT: eu apenas "motivei" a definição da DTFT e, no processo, mostrei a relação que existe entre ela e a TF (relação esta que está intimamente ligada com a motivação).

Provavelmente você deve ter ficado irritado(a) de eu trocado a notação de f para v. Afinal de contas, f e v são frequências e, além disso, não são iguais se T_s for 1? Na verdade, não: mesmo se T_s for igual à 1, v não será exatamente igual à f. Mais precisamente, para o caso de $T_s = 1$, v e f serão numericamente iguais, mas terão unidades diferentes: v é adimensional, enquanto f tem (sempre) unidades de Hertz (ou seja, 1/s). Essa diferença reflete a diferença formal entre a **Equação *55*** e a **Equação *54***: formalmente, a **Equação *54*** envolve a função temporal $f(t)$, enquanto a **Equação *55*** envolve somente uma sequência de números $f[n]$. Estritamente falando, a única operação possível de ser feita em um computador é a da **Equação *55***, exatamente porque ela é que envolve puramente uma sequência de números. Em outras palavras, estritamente falando, é impossível calcular uma Transformada de Fourier no computador diretamente, já que a TF envolve uma integral e no computador podemos apenas fazer somas. Estritamente falando novamente, toda e qualquer tentativa de calcular a TF em um computador terá que aproximar a integral pela soma; essa necessidade faz com que toda e qualquer cálculo da TF em um computador se reduza ao cálculo da DTFT. Como um dos principais objetivos desse curso é passar conceitos que permitam que o aluno relacione a DTFT com a TF de um sinal, poderíamos dizer que esse curso ensina a utilizar computadores para determinar o espectro de frequências de um sinal. E como essa é uma tarefa extremamente comum em ciências e engenharia, esse curso, apesar de ser, essencialmente, um curso de matemática, é um curso extremamente "prático", com aplicabilidade direta em praticamente todas as áreas de engenharia.

Tudo o que foi aprendido até aqui está resumido na **Figura *10***. Analise essa figura com cuidado. Imprima essa figura, faça um pôster, rasgue o do *Freddy Mercury* com colante e coloque essa figura no lugar. Você deve ser capaz de entender todas as relações envolvidas nessa figura: por que a TF de $f_d(t)$ é uma versão periódica da TF de $f(t)$, só que com amplitude multiplicada por f_s; e por que a DTFT de $f[n]$ é uma "cópia" da TF de $f_d(t)$, mas com o eixo de frequências dividido por f_s. Você tem que ser capaz de provar sozinho(a), matematicamente e qualitativamente, essas relações. Então não avance no texto enquanto você não conseguir deduzir tudo o que está implícito na **Figura *10*** sozinho(a).

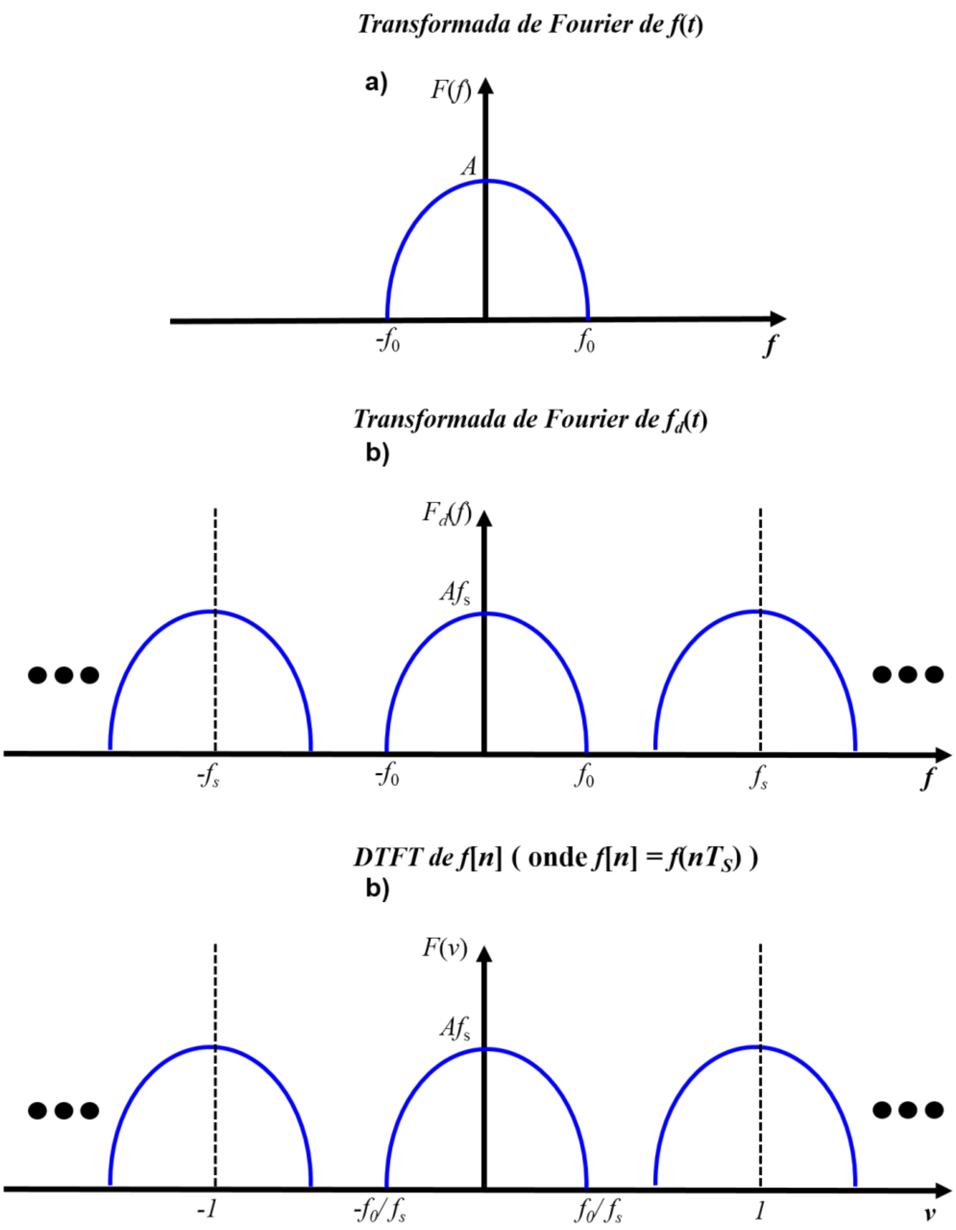


Figura 10

O aluno(a) atento deve ter notado que está faltando uma parte da história. Gastamos um tempão motivando a DTFT, mas ainda não dissemos nada sobre a DTFT inversa. De nada vale uma transformada se não soubermos a inversa!

Para encontrarmos a DTFT inversa, primeiro note o seguinte aspecto: a DTFT relaciona uma sequência de números com um espectro de "frequências" (entre aspas porque a frequência é, na verdade, normalizada, ou seja, deixa de ter unidade de frequências e passa a ser adimensional). Apesar da sequência de números ser apenas uma sequência de números, o seu espectro de "frequências" é uma função contínua (note que a notação é $F(v)$, com o argumento em parênteses, enfatizando que $F(v)$ é uma função contínua) e, além disso, periódica. Em que outro lugar você encontrou essa relação, onde um domínio é uma função discreta e o outro domínio é uma função contínua periódica? Esse é exatamente o caso da Série de Fourier (SF): a SF relaciona um sinal contínuo e periódico no tempo com um sinal discreto no domínio da frequência. Para facilitar a vida, vou colocar aqui o par Série de Fourier:

Equação 57

$$PAR \quad SF$$

$$SF\ Direta$$

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, exp\left(-i2\pi\frac{n}{T}t\right) dt$$

$$SF\ Inversa$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X[n]\, exp\left(i2\pi\frac{n}{T}t\right)$$

Onde *T* é o período do sinal. Formalmente, a DTFT é um caso particular da SF Inversa com os papéis de tempo e frequência trocados. Compare a SF inversa com a definição da DTFT: se na SF inversa você trocar *t* por *v* e escolher o período *T* = 1, você terá obtido uma expressão idêntica à DTFT (com exceção do sinal da exponencial, que é mera convenção). Isso quer dizer que, formalmente, a DTFT equivale à SF Inversa de um sinal com período *T* = 1.

Então, formalmente, se conhecemos o par SF, conhecemos também o par DTFT, a única diferença é que para a DTFT o período é sempre 1 e o domínio contínuo é *v*, enquanto para a SF o período é arbitrário e o domínio contínuo é *t*. Portanto podemos simplesmente utilizar o par SF para encontrar a inversa da DTFT: de fato, se a DTFT é formalmente igual à SF inversa com *T* = 1 e *t* trocado por *v*, então <u>necessariamente</u> a DTFT inversa tem que ser formalmente igual à SF direta, com *T* = 1 e *t* trocado por *v*. Assim, o par DTFT fica:

Equação 58

$$PAR \quad DTFT$$

$$DTFT\ Direta$$

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]\, exp(-i2\pi nv)$$

$$DTFT\ Inversa$$

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v)\, exp(i2\pi nv)\, dv$$

Compare a **Equação *58*** com a **Equação 57** e verifique de fato que o par da **Equação *58*** nada mais é que um caso particular (com T = 1) do par da **Equação 57**. Nessa comparação, lembre-se que o fato de eu representar o espectro por letra maiúscula e o sinal por letra minúscula é só uma convenção. O que importa é diferenciar quais funções são contínuas e quais são discretas. Além disso, você deve ter notado que no par SF o sinal da exponencial é positivo para a soma (SF inversa) e negativo para a integral (SF direta), enquanto no par DTFT o sinal é positivo para a integral (DTFT inversa) e negativo para a soma (DTFT direta). Qual sinal da exponencial é positivo e qual é negativo também é convenção. O que importa é que um seja positivo e o outro negativo, mas não importa qual é qual.

Note que, apesar de não ter como provar a expressão para a DTFT direta, uma vez que essa expressão foi definida, então a DTFT inversa tem que ser encontrada por dedução matemática formal. Eu não fiz isso aqui porque essa dedução é absolutamente idêntica à dedução da Série de Fourier, de novo pelo fato da DTFT ser um caso particular (com T = 1) da SF. Eu estou, com isso, é claro, supondo que você já tenha visto essa prova nos cursos que tratam especificamente da SF e da TF. Não há porque repetir a prova aqui.

Finalmente, note que toda vez que um domínio for discreto, o outro domínio será necessariamente periódico. Essa propriedade vem do fato de que um domínio discreto pode ser interpretado como sendo um domínio contínuo multiplicado por um trem de impulsos. Mas multiplicar um trem de impulsos em um domínio corresponde à convoluir o outro domínio com um trem de impulsos. E essa convolução resulta na periodicização do domínio. Foi exatamente esse processo de discretização em um domínio resultando na periodicização do outro, via trem de impulso, que mostramos explicitamente nesse capítulo.

3.2 – Propriedades da DTFT

Passemos agora a analisar algumas propriedades um tanto quanto úteis e importantes da DTFT. É óbvio que você tem que saber provar todas as propriedades na mão e na raça.

3.2.1 A DTFT é uma função periódica com período 1

Essa é uma das propriedades mais importantes da DTFT e, na verdade, já mostramos que isso tem que ser verdade quando comparamos a definição da DTFT com a TF de $f_d(t)$ (ou seja, quando comparamos a **Equação *55*** com a **Equação *54***) e, inclusive, utilizamos essa propriedade para justificar a definição da DTFT inversa. Além disso, essa propriedade está explicitamente ilustrada na **Figura *10***. Mas como essa é uma propriedade que você não pode nunca mais esquecer na vida, eu vou mostrar outra prova, muito fácil por sinal, partindo diretamente da definição. Por definição, a DTFT de um sinal $f[n]$ é:

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(-i2\pi\nu n)$$

Dizer que $F(\nu)$ tem período igual à 1, é equivalente à dizer que $F(\nu) = F(\nu+1)$ para qualquer valor de ν. Além disso, essa relação não pode ser satisfeita para nenhum valor menor que 1. Para testar se isso é verdade, basta fazer uma substituição direta:

$$F(\nu+1) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(-i2\pi(\nu+1)n)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(-i2\pi\nu \cdot n)\, exp(-i2\pi \cdot n)$$

Mas como n é um número inteiro, temos que $\exp(-i2\pi n) = 1$ para qualquer valor de n. Portanto:

Equação 59

$$F(\nu+1) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(-i2\pi\nu n) = F(\nu+1)$$

Por substituição direta você pode provar facilmente que isso só é verdade para múltiplos de 1. Portanto está provado que a DTFT é uma função periódica com período igual à 1. Não esqueça disso nunca mais.

3.2.2 A DTFT é linear

Como a DTFT pode ser interpretada como um caso particular da TF de $f_d(t)$, e como a TF é linear, então obviamente a DTFT também é linear. Se você é desse tipo de gente que tem por hobby provar que as coisas são lineares, segue a prova formal (mas é tão besta que nem merece um número para a equação):

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (af_1[n] + bf_2[n])\, exp(-i2\pi\nu n) =$$

$$= a\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_1[n]\, exp(-i2\pi\nu n) + b\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_2[n]\, exp(-i2\pi\nu n) = aF_1(\nu) + bF_2(\nu)$$

3.2.3 Propriedade de Simetria para sinais reais

Essa é uma propriedade bem útil e também tem a sua contraparte na TF. Ela diz que, se $f[n]$ for um sinal real (ou seja, se nenhum número da sequência for complexo), então necessariamente $F(\nu) = F^*(-\nu)$. A prova é direta: partindo de $F(\nu)$:

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(-i2\pi\nu \cdot n)$$

Temos que:

$$F^*(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f^*[n]\, exp(i2\pi\nu \cdot n)$$

Mas como $f[n]$ é real, temos que $f^*[n] = f[n]$. Portanto:

$$F^*(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(i2\pi\nu \cdot n)$$

E daí que:

Equação 60

$$F^*(-\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(-i2\pi\nu \cdot n) = F(\nu)$$

Note que essa propriedade implica que as funções $\mathrm{Re}\{F(\nu)\}$ (parte real de $F(\nu)$) e $|F(\nu)|$ (módulo de $F(\nu)$) são pares e que a tanto a função $\mathrm{Im}\{F(\nu)\}$ (parte imaginária de $F(\nu)$) de como a função ângulo de $F(\nu)$ são impares.

Essa propriedade é meio que esperada pela seguinte razão: se $f[n]$ for uma função real, então temos 1 grau de liberdade para cada valor de n. Entretanto, temos 2 graus de liberdade para $F(\nu)$, já que $F(\nu)$ é uma função complexa, e cada número complexo carrega 2 graus de liberdade (a parte real e a parte imaginária). Isso significaria que existira excesso de informação em $F(\nu)$. E esse excesso de informação não faria sentido, já que $f[n]$ e $F(\nu)$ são apenas duas representações diferentes do mesmo sinal. O que a propriedade de simetria te diz é que, na verdade, o grau de liberdade extra advindo da natureza complexa de $F(\nu)$ é compensado por um grau de liberdade a menos advindo da propriedade de simetria, que "trava" o valor de $F(-\nu)$ uma vez que $F(\nu)$ é determinado. Essa propriedade é bastante utilizada em algoritmos para otimizar o custo computacional da DTFT.

3.2.4 Deslocamento no "tempo"

A propriedade de deslocamento no "tempo" (entre aspas porque não temos tempo mais, apenas o índice n) é também bem útil na análise de sinais. Suponha que tenhamos um sinal $f[n]$ cuja DTFT é $F[\nu]$. Agora suponha que tenhamos um segundo sinal, $f_2[n]$, que é uma versão atrasada (ou adiantada, tanto faz), de $f[n]$, ou seja:

Equação 61

$$f_2[n] = f[n - n_0]$$

Onde n_0 é, obviamente, um número inteiro. Vamos chamar a DTFT de $f_2[n]$ de $F_2[\nu]$. Pergunta: qual é a relação entre $F_2[\nu]$ e $F[\nu]$? Essa pergunta pode ser respondida calculando $F_2[\nu]$ diretamente:

Equação 62

$$F_2(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_2[n]\, exp(-i2\pi\nu \cdot n) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n-n_0]\, exp(-i2\pi\nu \cdot n)$$

Para achar a relação entre $F_2[\nu]$ e $F[\nu]$, defina o índice m como:

Equação 63

$$m = n - n_0$$

Queremos re-expressar o somatório da ***Equação 63*** em termos de m. Como o somatório em n vai de $-\infty$ a $+\infty$, o somatório em m também vai de $-\infty$ a $+\infty$. Assim temos que:

$$F_2(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f[m]\, exp[-i2\pi\nu(m+n_0)] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f[m]\, exp(-i2\pi\nu \cdot m)\, exp(-i2\pi\nu \cdot n_0)$$

Como n_0 é um número fixo, que não depende de m, podemos isolar os termos que só dependem de n_0 na soma. Assim temos:

Equação 64

$$F_2(\nu) = exp(-i2\pi\nu \cdot n_0) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f[m]\, exp(-i2\pi\nu \cdot m)$$

A soma em m na **Equação *64*** é exatamente a DTFT de $f[n]$ (não faz absolutamente nenhuma diferença fazer a soma chamando o índice de m ou de n, ou de p ou seja lá o que for). Daí temos finalmente que:

Equação 65

$$F_2(\nu) = exp(-i2\pi\nu \cdot n_0)\, F(\nu)$$
$$quando$$

$$f_2[n] = f[n - n_0]$$

Note que

Equação 66

$$|F_2(\nu)| = |exp(-i2\pi\nu \cdot n_0)\, F(\nu)| = |F(\nu)|$$

A **Equação *65*** te diz que se você adiantar ou atrasar um sinal, você vai estar simplesmente alterando a fase do espectro, mas a amplitude é inalterada (lembre-se que o módulo da exponencial com argumento imaginário é sempre igual à 1). Isso faz sentido, já que a amplitude do espectro de frequências de um sinal só pode depender de como o sinal varia, mas não pode depender de quando o sinal começa em absoluto. O mesmo sinal emitido hoje ou amanhã vai ter a mesma amplitude no espectro de frequências: a única coisa que pode mudar é a fase dessas frequências. Finalmente, compare a propriedade de deslocamento no domínio discreto (**Equação *65***) com a propriedade de deslocamento no domínio contínuo (ou seja, a propriedade de deslocamento da TF – se você esqueceu faça um *google*) e você vai ver que elas são análogas.

3.2.4 Diferença

Suponha novamente que tenhamos um sinal $f[n]$ com DTFT $F(\nu)$. Agora defina o sinal $f_2[n]$ como a diferença do sinal $f[n]$:

Equação 67

$$f_2[n] = f[n] - f[n-1]$$

Pergunta: qual a relação entre $F_2(\nu)$ e $F(\nu)$? A resposta pode ser facilmente encontrada de maneira direta novamente:

$$F_2(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_2[n]\, exp(-i2\pi\nu n) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (f[n] - f[n-1])\, exp(-i2\pi\nu n)$$

Então

$$F_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_2[n]\, exp(-i2\pi vn)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n]\, exp(-i2\pi vn) - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[n-1]\, exp(-i2\pi vn)$$

A soma envolvendo *f*[n] (primeiro termo à direita da equação acima) é a própria DTFT de *f*[n]. Além disso, a soma envolvendo *f*[n-1] pode ser relacionada à DTFT de *f*[n] através da propriedade de deslocamento no tempo (**Equação *65*** com n_0 = 1). Assim, temos que:

$$F_2(v) = F(v) - exp(-i2\pi v1)\, F(v) = [1 - exp(-i2\pi v)]F(v)$$

Portanto:

Equação 68

$$F_2(v) = [1 - exp(-i2\pi v)]F(v)$$
$$quando$$
$$f_2[n] = f[n] - f[n-1]$$

Embora a dedução da propriedade de diferenças seja bem direta e óbvia, a relação entre essa propriedade e a sua contraparte contínua não é tão óbvia assim. Para apreciar essa aparente estranheza, lembre-se que executar uma operação de diferenças no domínio discreto é a contraparte da derivada no domínio contínuo. Portanto a propriedade de diferenças deve ser análoga à propriedade da derivada. Mas se você lembrar bem, a propriedade de derivação não tem nada a ver com a expressão da **Equação *68***. De fato, a propriedade da derivada da TF diz que:

Equação 69

$$X_2(f) = i2\pi f X(f)$$
$$quando$$
$$x_2(t) = \frac{dx}{dt}$$

Então tem algo estranho. Embora a operação de diferenças seja a contraparte da derivada, a **Equação *68*** é bem diferente da **Equação *69***. Enquanto uma envolve multiplicar o espectro por uma expressão envolvendo uma exponencial, a outra envolve simplesmente multiplicar o espectro por $i2\pi f$. Como relacionar as duas propriedades?

Para entender melhor a importância dessa pergunta, suponha que você tenha um sinal contínuo $x(t)$ e sua derivada $x_2(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Você já sabe que os espectros $X(f)$ e $X_2(f)$ estão relacionados pela **Equação *69***. Agora vamos supor que você gere um sinal $f[n]$ a partir da amostragem de $x(t)$ com período de amostragem T_s. Além disso, você amostra também o sinal $x_2(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, gerando assim o sinal $f_2[n]$.

Então temos dois sinais contínuos e as suas contrapartes discretas. Da **Figura *10*** já sabemos que $F(v)$ (lembre-se que $F(v)$ é a DTFT de $f[n]$) é formado por cópias escalonadas de $X(f)$ (onde $X(f)$ é o espectro de $x(t)$). Analogamente, $F_2(v)$ é formado por cópias escalonadas de $X_2(f)$. Estas relações são representadas novamente na **Figura *11*** (Note que a parte ***a*** da **Figura *11*** corresponde ao primeiro e terceiro gráficos da **Figura *10***, enquanto a parte ***b*** repete essas relações, mas para o espectro de $X_2(f)$).

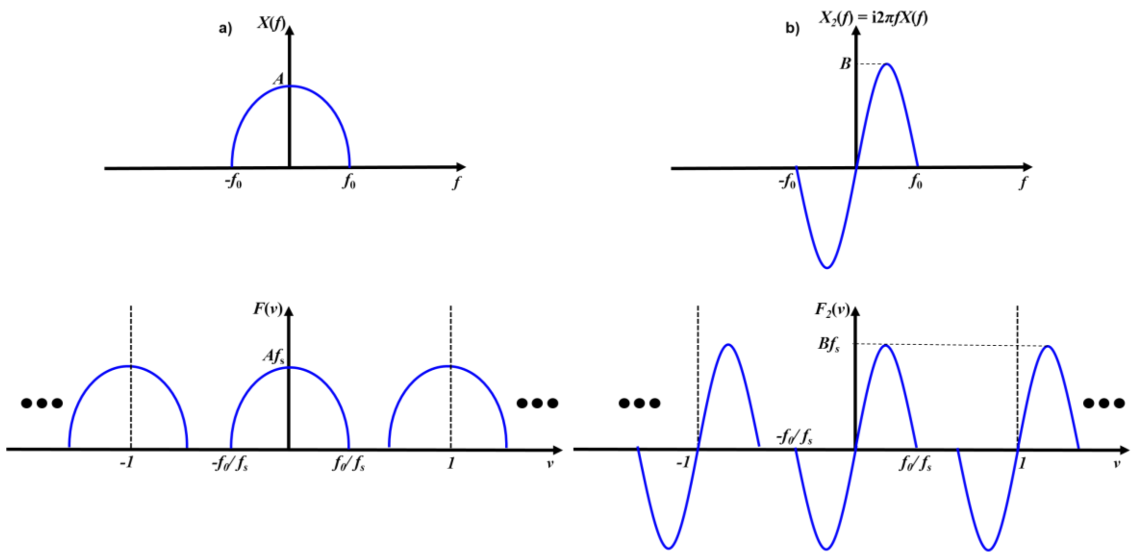


Figura 11

Para facilitar, considere somente o primeiro período de $F(v)$ e $F_2(v)$. Vamos chamar o primeiro período de $F(v)$ de $FPP(v)$ e o primeiro período de $F_2(v)$ de $FPP_2(v)$. Como $FPP(v)$ e $FPP_2(v)$ correspondem à versões escalonadas de $X(f)$ e $X_2(f)$, e como $X(f)$ e $X_2(f)$ obedecem à relação $X_2(f) = \mathrm{i}2\pi f X(f)$, então, necessariamente, $FPP(v)$ e $FPP_2(v)$ têm que obedecer à relação:

Equação 70

$$FPP_2(v) = i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot FPP(v)$$

Agora, vamos supor que você não possa amostrar $x_2(t) = dx/dt$. Vamos supor que tudo o que você tem é $x(t)$. Mas você precisa do espectro da derivada de $x(t)$. O que você faz? Obviamente, sua única opção é amostrar $x(t)$ (gerando assim a sequência $f[n]$) e depois calcular numericamente a derivada de $x(t)$. Mais especificamente, você vai gerar o sinal diferenças $f_3[n]$, tal que:

Equação 71

$$f_3[n] = \frac{1}{T_s}(f[n] - f[n-1])$$

O sinal $f_3[n]$ corresponde ao sinal diferença de $f[n]$ dividido por T_s. Tivemos que dividir por T_s porque estamos interessados em plotar algo que corresponda ao espectro da derivada do sinal temporal e a **Equação *71*** nada mais é que o cálculo numérico da derivada de $x(t)$. Mas se isso é verdade, então a DTFT de f_3[n] tem que corresponder à DTFT de $f_2[n]$ (lembre-se que $f_2[n]$ é o sinal gerado a partir da amostragem de x_2(t) = dx/dt). Mas a propriedade da **Equação *68*** nos diz que:

$$F_3(v) = \frac{1}{T_s}[1 - exp(-i2\pi v)]F(v)$$
$$quando$$
$$f_3[n] = \frac{1}{T_s}(f[n] - f[n-1])$$

Focando somente no primeiro período do espectro, temos então que:

Equação 72

$$FPP_3(v) = \frac{1}{T_s}[1 - exp(-i2\pi v)]FPP(v)$$

Aí está a encrenca: como $f_2[n]$ é o sinal gerado a partir da derivada de $x(t)$, e $f_3[n]$ é a derivada de $x(t)$ calculada numericamente, se houver justiça no mundo a gente espera que ambos sinais sejam equivalentes e que a DTFT de $f_2[n]$ e $f_3[n]$ sejam iguais. Mas se compararmos a **Equação *70*** com a **Equação *72***, vemos que elas não são iguais.

Na verdade, há justiça no mundo sim (de vez em quando só). O que ocorre aqui é que temos que lembrar que $f_3[n]$ só é precisamente a derivada de $x(t)$ no limite que T_s vai para zero. Isso quer dizer que, o que temos que provar é que quanto menor for T_s, mais próximo $f_3[n]$ será de $f_2[n]$ e, consequentemente, mais próximo $F_3(\nu)$ será de $F_2(\nu)$ (e, claro, $FPP_3(\nu)$ de $FPP_2(\nu)$).

Para provar que isso é verdade, primeiro lembre-se que quanto menor for T_s, maior será f_s. Portanto, quanto menor for T_s, menor será a razão f_0/f_s (veja a **Figura *11*** e lembre-se que f_0 é a maior frequência do sinal $x(t)$). Mas o ponto $\nu_0 = f_0/f_s$ define o maior valor de ν_0 para o qual $FPP(\nu)$ é diferente de zero (veja novamente a **Figura *11***): $FPP(\nu)$ é zero para qualquer frequência acima de $\nu_0 = f_0/f_s$. Isso significa que podemos expandir a exponencial da **Equação *72*** em uma série de Taylor e reter somente os dois primeiros termos (de ordem 0 e ordem 1), já que os termos de mais alta ordem só desempenham um papel relevante para frequências altas, quando o lado direito inteiro da **Equação *72*** será zero porque $FPP(\nu)$ será zero. Em outras palavras, quando os termos mais altos da série forme relevantes (ou seja, para frequências altas), tudo irá para zero porque $FPP(\nu)$ será zero; por isso, os termos de mais alta ordem podem ser ignorados. Então expandindo a exponencial em série de Taylor em torno de $\nu = 0$ e retendo apenas os dois primeiros termos temos:

$$FPP_3(\nu) \approx \frac{1}{T_s}[1 - (1 - i2\pi\nu)]FPP(\nu)$$

Ou seja:

$$FPP_3(\nu) \approx \frac{1}{T_s} i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot FPP(\nu)$$

Mas como $1/T_s = f_s$, temos:

$$FPP_3(\nu) \approx i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot \nu \cdot FPP(\nu)$$

Mas como $v = f/f_s$ (**Equação *56***), temos que $f = vf_s$, *ou seja:*

Equação 73

$$FPP_3(v) \approx i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot FPP(v)$$

Quanto menor for T_s, melhor será a aproximação da **Equação *73*** (e a aproximação vira uma igualdade no limite de T_s indo para zero). Comparando a **Equação *73*** com a **Equação *70***, deduzimos que quanto menor for o período de amostragem T_s mas próximo $f_3[n]$ será de $f_2[n]$, ou seja, mais preciso será o cálculo numérico da derivada, o que faz sentido e restaura a justiça no mundo.

Mas quão pequeno T_s deve ser? É claro que a resposta é “depende do sinal”. E esse fato está matematicamente expresso pelo termo $v_0 = f_0/f_s$. No fim das contas, é só esse termo que define quão boa é aproximação da expansão em série de Taylor. Portanto, quem decide quão pequeno deve ser T_s (ou, equivalentemente, quão grande deve ser f_s) é f_0. Em português: quanto maior for a frequência mais alta do sinal (f_0), maior terá que ser a frequência de amostragem (f_s).

3.2.5 Soma

A soma, naturalmente, é o análogo da integral no domínio contínuo. A dedução é muito trivial, a não ser pela inclusão de um termo DC. Para explicar a origem desse termo DC, eu vou primeiro revisar a propriedade da integral no domínio contínuo e então explicar a origem do termo DC no domínio contínuo, o que basta para entender a origem no domínio discreto.

Então vamos começar por uma revisão da integral no domínio contínuo. Suponha que temos um sinal $y(t)$ que corresponda à integral de um sinal $x(t)$:

Equação 74

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Queremos saber qual é a relação entre a TF de $y(t)$ e a TF de $x(t)$. Como $x(t)$ pode ser obtido derivando de $y(t)$, portanto tem que ser verdade que:

Equação 75

$$Se \quad \frac{dy}{dt} = x(t) \quad então \quad i2\pi f Y(f) = X(f)$$

Daí poderíamos concluir que $Y(f) = X(f)/i2\pi f$. Mas essa conclusão é só quase verdade. Na verdade, ela está incompleta: note que como $x(t)$ é a derivada de $y(t)$, então $x(t)$ retém apenas a parte AC do sinal $y(t)$ (a derivada da parte DC de $y(t)$ é zero). Então a relação $Y(f) = X(f)/i2\pi f$ só pode estar certa no que corresponde à parte AC de $y(t)$. Esse fato é ainda mais óbvio se você lembrar que a parte DC de um sinal corresponde ao ponto $f = 0$ no espectro de frequências, mas a relação $Y(f) = X(f)/i2\pi f$ daria $Y(f)$ infinito no ponto $f = 0$. Portanto a relação $Y(f) = X(f)/i2\pi f$ só pode estar correta para $f \neq 0$. Assim, a relação $Y(f) = X(f)/i2\pi f$ está correta desde que fique entendido que ela só é válida para $f \neq 0$. Mas como encontrar $Y(f = 0)$? Em outras palavras, como encontrar a parte DC do sinal $y(t)$?

Para responder essa pergunta, primeiro note o seguinte: se $x(t)$ for um sinal, então $x(t)$ é limitado no tempo, porque qualquer sinal tem começo e fim (apenas funções base para sinais, como seno e cosseno, são ilimitadas no tempo, mas não o sinal em si). Então podemos supor razoavelmente que $x(t)$ seja limitado no tempo. Vamos supor que $x(t)$ comece em t_1 e acabe em t_2, como representado na **Figura *12***. Dessa forma, é claro que o sinal $y(t)$ também vai começar em t_1. Além disso, o sinal $y(t)$ passa a ser constante para tempos maiores que t_2, como representado na **Figura *12***. Se você não entendeu por que o sinal $y(t)$ é constante para $t > t_2$, considere um tempo t_3 que seja maior que t_2. Temos que:

$$y(t_3) = \int_{-\infty}^{t_3} x(\tau)d\tau$$

Mas se t_3 é maior que t_2, podemos dividir a integral em duas partes, a primeira começando em $-\infty$ e terminando em t_2 e a segunda começando em t_2 e terminando em t_3:

$$y(t_3) = \int_{-\infty}^{t_3} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t_2} x(\tau)d\tau + \int_{t_2}^{t_3} x(\tau)d\tau$$

Mas como $x(t) = 0$ para $t > t_2$, a segunda integral será zero, ou seja:

Equação 76

$$y(t_3) = \int_{-\infty}^{t_3} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t_2} x(\tau)d\tau + \int_{t_2}^{t_3} 0d\tau = \int_{-\infty}^{t_2} x(\tau)d\tau = y(t_2)$$

Como a **Equação *76*** é válida para qualquer t_3 que seja maior t_2, então $y(t)$ é contínuo para $t > t_2$.

Agora vamos separar graficamente o sinal $y(t)$ da **Figura *12*** em sua parte AC e DC. Para facilitar a notação, vamos chamar a amplitude $y(t_2)$ de B, como representado na **Figura *12***. A parte AC de y(t) tem que ser um sinal cuja integral de -∞ a +∞ seja 0. Isso significa que o sinal AC tem que ter uma parte negativa que cancele a parte positiva. Mas como y(t) não é limitado no tempo (já que $y(t) = B$ para $t > t_2$, estendendo até o infinito), então a parte AC de y(t) vai ter que ter uma parte negativa infinita para compensar a parte positiva infinita. Vamos dividir y(t) então em uma parte AC e uma parte DC explicitamente:

$$y(t) = y_{AC}(t) + DC$$

Já sabemos que $Y(f) = X(f)/i2\pi f$ corresponde à Transformada de Fourier da parte AC de $y(t)$. Formalmente, temos então que:

Equação 77

$$TF[y_{AC}(t)] = Y_{AC}(f) = \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

Onde *TF*[] é a Transformada de Fourier. Tudo o que precisamos agora é da TF da parte DC. Mas a parte DC é uma constante, ou seja, um número. Como a TF de 1 é a função impulso centrada em zero (como de se esperar), então a TF de DC é o nível DC vezes a função impulso centrada em zero. Tudo o que precisamos então é achar qual é o nível DC.

É mais fácil visualizar graficamente o nível DC do que deduzir rigorosamente. Como representado na **Figura *12***, se $y(t = t_2) = y(t = \infty) = B$, então a parte DC tem que ser um sinal com amplitude $B/2$, ou seja:

$$y(t) = y_{AC}(t) + DC = y_{AC}(t) + \frac{y(t \to \infty)}{2}$$

Mas *y* no tempo infinito é a integral de *x*(*t*) de -∞ a +∞:

Equação 78

$$y(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau$$

Mas a integral de -∞ a +∞ corresponde à *X*(0). De fato, se *X*(*f*) é:

Equação 79

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, exp(-i2\pi f)\, dt$$

Então

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, exp(-i2\pi 0)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

Portanto:

Equação 80

$$y(\infty) = X(0)$$

De onde concluímos que:

Equação 81

$$y(t) = y_{AC}(t) + DC = y_{AC}(t) + \frac{X(0)}{2}$$

Então pronto, já identificamos que o nível DC é *X*(0)/2 o que significa que já identificamos quem é *Y*(0), já que a TF de X(0)/2 é simplesmente X(0)/2 vezes a função impulso (já que *X*(*0*)/2 é uma constante, ou seja, um número). Juntando essa informação com a TF da parte AC temos finalmente que:

Equação 82

$$Y(f) = \frac{X(f)}{i2\pi f} + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$$

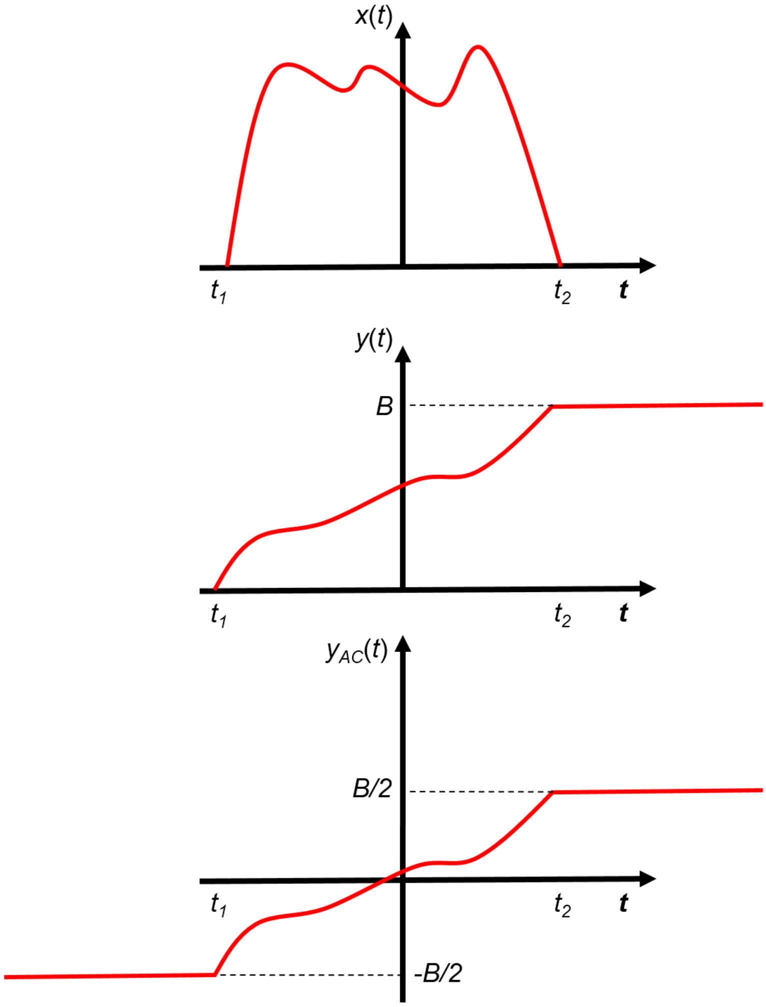


Figura 12

No domínio discreto é a mesma coisa. Supomos que temos um sinal soma definido como:

Equação 83

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} f[m]$$

Então $f[n]$ é dado pela diferença de $g[n]$:

Equação 84

$$g[n] - g[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{n} f[m] - \sum_{m=-\infty}^{n-1} f[m] = f[n]$$

Analogamente ao que fizemos no domínio contínuo, vamos dividir o sinal $g[n]$ em uma parte AC e uma parte DC:

Equação 85

$$g[n] = g_{AC}[n] + DC$$

Usando a propriedade de diferenças da DTFT (***Equação 68***), temos direto que a DTFT da parte AC de $g[n]$ é:

$$G_{AC}[v] = \frac{F(v)}{1 - exp(-i2\pi v)}$$

Analogamente ao caso contínuo, a DTFT da parte DC será a função impulso vezes $F(0)/2$. A única diferença é que temos que ter um trem de funções impulsos, já que a DTFT do sinal é periódica (ou seja, temos que ter uma função impulso para cada período). Assim temos finalmente que:

Equação 86

$$G[v] = \frac{F(v)}{1 - exp(-i2\pi v)} + \frac{F(0)}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(v - k)$$

3.2.6 Convolução

Uma das mais importantes propriedades da transformada de Fourier é a propriedade que estabelece que uma convolução no domínio do tempo corresponde à multiplicação no domínio da frequência. Nessa seção, vamos provar que essa propriedade também é valida para a DTFT. Mas antes, é necessário definir a operação de convolução no domínio discreto.

Se $z[n]$ é o sinal obtido pela convolução entre os sinais $f[n]$ e $g[n]$, então:

Equação 87

$$z[n] = f[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]g[n-m]$$

Note que a soma é efetuada em m.

Nosso objetivo então é provar que $Z(v) = F(v)G(v)$, onde $Z(v)$, $F(v)$ e $G(v)$ são as DTFTs de $z[n]$, $f[n]$ e $g[n]$, respectivamente. Para isso, podemos calcular a DTFT de $z[n]$ diretamente:

$$Z(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n]\, exp(-i2\pi vn) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]g[n-m]\, exp(-i2\pi vn)$$

Na relação acima, temos duas somas, uma em n e uma em m. O resultado, é claro, não depende da ordem da soma, então podemos escolher qual soma vamos efetuar primeiro. A escolha natural é fazer a soma em n primeiro, porque fazendo a soma em n estaremos efetivamente calculando a DTFT do sinal $g[n-m]$, que por sua vez podemos expressar em termos de $G(v)$ utilizando a propriedade do deslocamento temporal (**Equação *65***). Invertendo então a ordem das somas:

$$Z(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-m]\, exp(-i2\pi vn)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]\, exp(-i2\pi vm)\, G(v) = G(v) \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]\, exp(-i2\pi vm)$$

Onde a **Equação *65*** foi utilizada. Agora a soma em m coincide com a DTFT de $f[n]$, portanto:

Equação 88

se

$$z[n] = f[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]g[n-m]$$

$$então$$

$$Z(v) = G(v) \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]\, exp(-i2\pi vm) = G(v)F(v)$$

Provamos então a propriedade da convolução para a DTFT. Antes de finalizarmos essa seção, eu quero chamar a atenção para um aspecto da propriedade de convolução que é de alta relevância prática.

Suponha que você tenha dois sinais $f[n]$ e $g[n]$, onde os sinais possuem comprimento *M*. Matematicamente, dizer que o comprimento do sinal é *M* equivale a dizer que temos apenas *M* elementos consecutivos diferentes de 0 no sinal. Por exemplo, um sinal com *M* = 3 elementos pode ser armazenado em *n* = -1, *n* = 0 e *n* = 1. Mas vamos supor que você armazene o seu sinal de M elementos em um vetor com N elementos (onde *N* > *M*, claro). Por exemplo, vamos supor novamente que *M* = 3 e que *N* = 7. Qual será o comprimento do vetor $z[n]$ resultante da convolução entre $f[n]$ e $g[n]$? Não é difícil de deduzir que o comprimento de $z[n]$ será *MZ* = 2*M* – 1. Então se *M* = 3, o comprimento de z será *MZ* = 5. Se você armazenar o sinal z em um vetor com *N* = 7 elementos, então você está em bons lençóis. Mas se você tentar armazenar em um vetor com *N* = 3 elementos, você vai não vai conseguir e o sinal z[n] ficará distorcido. Portanto tome muito cuidado ao fazer operações de convolução no computador e lembre-se sempre que o sinal resultante da convolução é mais longo que os sinais originais. A figura abaixo mostra um exemplo de convolução entre dois sinais com *M* = 3.

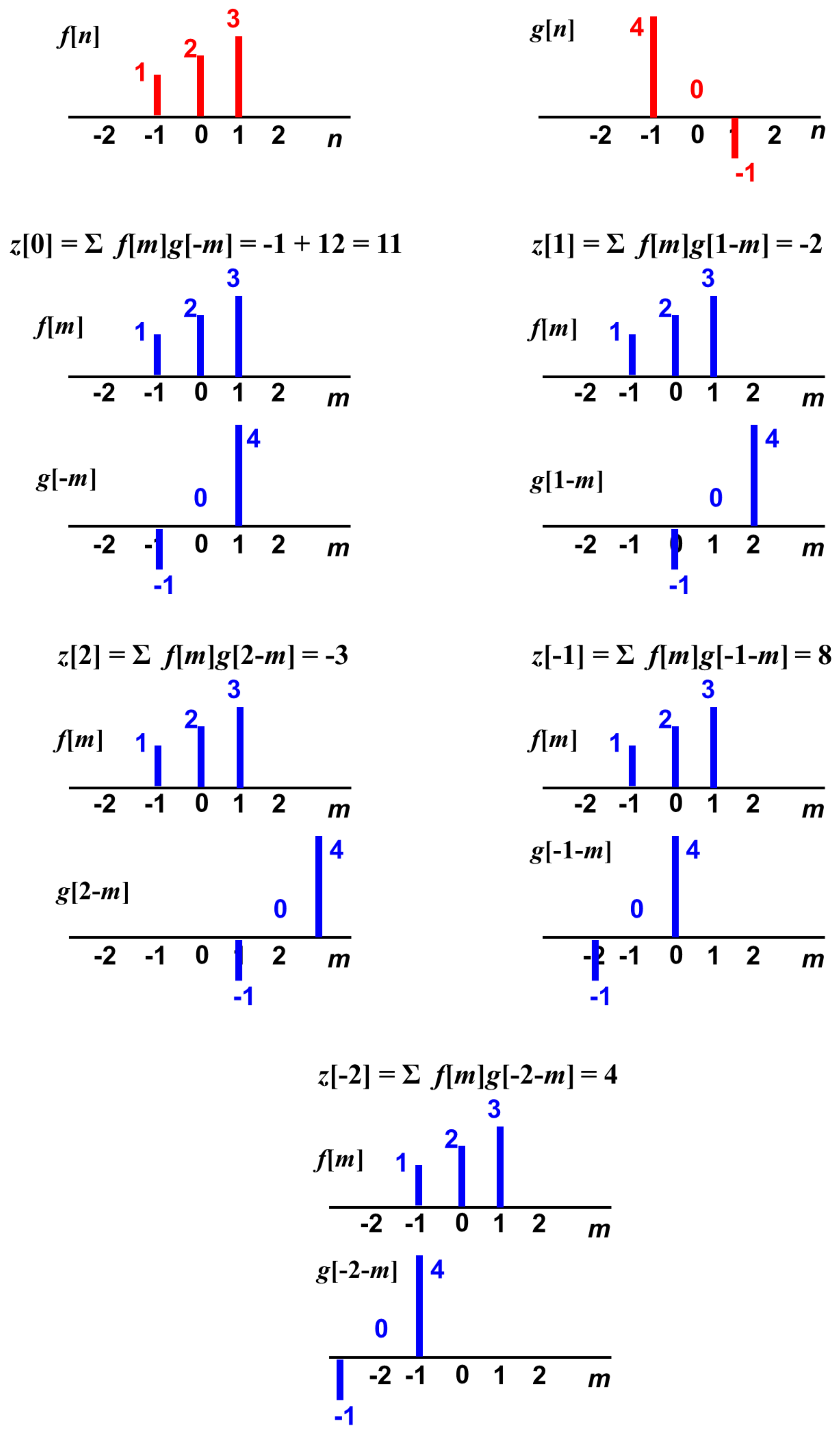


Figura 13 Exemplo gráfico da operação de convolução $z[n] = f[n]*g[n]$

3.2.7 Propriedade de modulação

A contraparte da propriedade de convolução é a chamada propriedade de modulação, que afirma que a multiplicação no domínio do tempo corresponde à convolução no domínio da frequência. A prova é muito simples: suponha que:

$$z[n] = f[n]g[n]$$

Então:

$$Z(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]g[n]\, exp(-i2\pi vn)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-0.5}^{0.5} F(v')\, exp(i2\pi v'n)\, dv' \right) g[n]\, exp(-i2\pi vn)$$

Invertendo (outra vez) a ordem das operações:

$$Z(v) = \int_{-0.5}^{0.5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(v')g[n]\, exp(-i2\pi vn)\, exp(i2\pi v'n)\, dv'$$
$$= \int_{-0.5}^{0.5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(v')g[n]\, exp[-i2\pi(v - v')n]\, dv'$$

A soma, que envolve apenas $g[n]$ e a exponencial, corresponde à DTFT de $g[n]$ avaliada na frequência $v - v'$. Portanto:

$$Z(v) = \int_{-0.5}^{0.5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(v')g[n]\, exp[-i2\pi(v - v')n]\, dv' = \int_{-0.5}^{0.5} F(v')G(v - v')dv'$$

Portanto:

Equação 89

$$Z(v) = \int_{-0.5}^{0.5} F(v')G(v - v')dv' = F(v) *_P G(v)$$

A relação acima corresponde à convolução entre F(v) e G(v), como esperado. Mas tem uma pequena, porém importante, diferença; diferença essa que enfatizamos utilizando o símbolo *p para a convolução ao invés do símbolo *. A diferença é o seguinte: apesar da integral envolver apenas o intervalo entre -0.5 e 0.5 (ou seja, apenas o período centrado em v = 0), a integral pode envolver termos de $G(v)$ fora desse período, já que G entra como $G(v - v')$. Portanto, a convolução envolve um período de $F(v)$ (centrado em v = 0), e três períodos de $G(v)$ (centrados em v = -1, v = 0 e v = 1). Essa operação é comumente chamada de convolução periódica.

4 – A energia de um sinal discreto

Agora que encontramos uma representação espectral para sinais discretos (em outras palavras: agora que definimos o par DTFT) e vimos algumas de suas principais propriedades, precisamos voltar a atenção a um problema importantíssimo, que é a determinação da energia do sinal discreto. Em particular, no caso de sinais discretos amostrados, precisamos determinar uma relação entre a energia do sinal original contínuo e a energia do sinal discreto.

Primeiro, lembremos o que é a energia de um sinal contínuo e como podemos calculá-la no domínio da frequência. Por definição, a energia E de um sinal contínuo $x(t)$ é:

Equação 90

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Além disso, se $X(f)$ for a Transformada de Fourier de x(t), então o Teorema de Parseval (ou teorema de Plancherel) nos diz que:

Equação 91

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Nosso objetivo é responder a três perguntas: 1 – Qual a definição de energia para um sinal discreto, 2 – Como podemos calcular a energia de um sinal discreto no domínio da frequência e 3 – Qual a relação da energia do sinal discreto amostrado e o sinal contínuo.

A resposta para a primeira pergunta é fácil, porque é simplesmente uma definição: a energia de um sinal discreto é definida como:

Equação 92

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

A **Equação *92*** é o análogo no domínio discreto da **Equação *90***.

Responder as questões 2 e 3 já é mais complicado. Primeiro vamos focar na questão 2: como podemos calcular E no domínio da frequência? Para determinar E no domínio da frequência, vamos precisar da seguinte igualdade:

Equação 93

$$\delta(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp(i2\pi vn)$$

A **Equação *93*** nos diz que a função impulso no domínio da frequência corresponde à uma soma infinita de exponenciais complexas (fasores). É óbvio que você tem que saber o porquê dessa igualdade ser verdade, mas para não quebrar o fluxo do raciocínio, eu coloquei a prova dessa igualdade em um apêndice no final desse documento. Por enquanto, aceite que a igualdade é verdadeira, mas assim que você terminar o capítulo 4 estude o apêndice para entender o porquê da igualdade ser verdadeira.

Para re-escrever a **Equação *92*** no domínio da frequência, temos que expressar x[n] e o seu conjugado em termos de suas DTFTs. Primeiro note que se $X(v)$ for a DTFT de $x[n]$, então podemos escrever:

Equação 94

$$x[n] = \int_{-0.5}^{0.5} X(v)\, exp(i2\pi vn)\, dv$$

Que nada mais é que DTFT inversa de $x[n]$. Temos também que:

Equação 95

$$x^*[n] = \int_{-0.5}^{0.5} X^*(v)\, exp(-i2\pi vn)\, dv$$

Substituindo essas duas relações na **Equação *92*** temos:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-0.5}^{0.5} X(v)\, exp(i2\pi vn)\, dv\right)\left(\int_{-0.5}^{0.5} X^*(v)\, exp(-i2\pi vn)\, dv\right)$$

Portanto temos que:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5} X(v)X^*\,(v')\, exp[i2\pi(v-v')n]\, dvdv'\right)$$

Invertendo a ordem da soma com a da integral fica:

Equação 96

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5} X(v)X^*\,(v') \sum_{n=-\infty}^{\infty} (exp[i2\pi(v-v')n])dvdv'$$

Mas, pela igualdade da **Equação *93***, o resultado da soma é a função impulso (com o argumento *v – v´*). Assim temos que:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5} X(v)X^*\,(v')\delta(v-v')dvdv'$$

A presença da função impulso faz com que a integral em *v'* resulte em:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5} X(v)X^*\,(v)dv = \int_{-0.5}^{0.5} |X(v)|^2\, dv$$

Assim temos que:

Equação 97

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5} |X(v)|^2 \, dv$$

A **Equação *97*** nos ensina a calcular a energia no domínio da frequência. Ela é o Teorema de Parseval para a DTFT. Assim, respondemos à segunda pergunta. Só falta a terceira: qual é a relação entre a energia do sinal contínuo e a energia do sinal discreto amostrado?

Essa pergunta só faz sentido se a amostragem do sinal contínuo foi feita corretamente, ou seja, se a frequência de amostragem f_s for no mínimo duas vezes maior que a maior frequência do sinal contínuo. Vamos chamar novamente a maior frequência do sinal contínuo de f_0. Além disso, vamos chamar a energia do sinal contínuo de E_c e a energia do sinal discreto de E_d. Assim temos que:

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_c(f)|^2 df$$

e

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5} |X(v)|^2 \, dv$$

Note que, para evitar confusão, eu chamei o espectro de x(t) de $X_c(f)$, para poder diferenciar do espectro $X(v)$.

Se a maior frequência do sinal contínuo é f_0, então $X_c(f) = 0$ para $f > f_0$. Por isso, ao invés de integrar sobre todo o espectro de $X_c(f)$, podemos limitar a integral na região onde $X_c(f)$ não é zero, ou seja:

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-f_0}^{f_0} |X_c(f)|^2 df$$

Mas para poder fazer a correlação como sinal discreto de maneira mais direta, eu vou colocar os limites da integral em f_s ao invés de f_0 (lembre-se que como a frequência de amostragem é maior que $2f_0$, então $f_s/2 > f_0$ e portanto contribuição da integral entre f_0 e $f_s/2$ será 0, porque $X(f)$ para $f > f_0$ é 0). Então vamos deixar na seguinte forma:

Equação 98

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} |X_c(f)|^2 df$$

Nosso objetivo é expressar E_d em termos de E_c. Para isso, podemos utilizar a relação entre $X(v)$ e $X_c(f)$ que já conhecemos: no capítulo 2, vimos que $X(v)$ é uma versão escalonada e periódica de $X_c(f)$. Além disso, a amplitude de $X(v)$ é fs vezes maior que a amplitude de $X_c(f)$. Como podemos expressar essas informações matematicamente? Primeiramente, como a integral da **Equação *97*** envolve apenas o primeiro período de $X(v)$, podemos esquecer o fato de que $X(v)$ é periódico. Esse "esquecimento" pode ser expresso matematicamente definindo a equação $X_{1p}(v)$ como sendo o primeiro período de $X(v)$ e expressando a energia em termos de $X_{1p}(v)$.

Equação 99

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5} |X(v)|^2 \, dv = \int_{-0.5}^{0.5} \left|X_{1p}(v)\right|^2 \, dv$$

Como $X_{1p}(v)$ é uma simplesmente uma versão escalonada de $X_c(f)$ multiplicada por f_s, temos a seguinte relação:

Equação 100

$$X_{1p}(v) = X_c(vf_s)f_s$$

Onde, é claro, $v = f/f_s$. Substituindo a **Equação *100*** na **Equação *99***:

Equação 101

$$E_d = \int_{-0.5}^{0.5} \left|X_{1p}(v)\right|^2 \, dv = f_s^2 \int_{-0.5}^{0.5} |X_c(vf_s)|^2 \, dv$$

Agora vamos fazer uma troca de variável. Vamos definir $f = vf_s$ e reexpressar a integral da **Equação *101*** em termos de f. Em termos de f, os limites da integral serão -0.5f_s e +0.5f_s. Além disso, como $dv = df/f_s$, teremos:

$$E_d = \int_{-0.5}^{0.5} \left|X_{1p}(v)\right|^2 dv = f_s^2 \int_{-0.5}^{0.5} |X_c(vf_s)|^2 \, dv = f_s^2 \int_{-0.5f_s}^{0.5f_s} |X_c(f)|^2 \frac{df}{f_s}$$

Assim, temos que:

$$E_d = \int_{-0.5}^{0.5} \left|X_{1p}(v)\right|^2 dv = f_s \int_{-0.5f_s}^{0.5f_s} |X_c(f)|^2 \, df$$

Juntando tudo, temos:

Equação 102

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5} |X(v)|^2 \, dv = f_s \int_{-0.5f_s}^{0.5f_s} |X_c(f)|^2 \, df$$

Finalmente, substituindo a **Equação *98*** na **Equação *102***:

Equação 103

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = f_s \int_{-0.5f_s}^{0.5f_s} |X_c(f)|^2 \, df = f_s E_c$$

A relação expressa na **Equação *103*** é muito útil. Ela te diz qual é a relação entre a energia do sinal discreto (E_d) e a energia do sinal contínuo (E_c). Na prática, você provavelmente vai enfrentar situações onde você tem apenas o sinal discreto, mas você precisa saber qual é a energia do sinal contínuo. Nesse caso, basta calcular a energia do sinal discreto e dividir por f_s (ou multiplicar por T_s, tanto faz) que você obterá a energia do sinal contínuo.

5 – A DFT (Discrete Fourier Transform)

5.1 Introdução

O aluno atencioso deve ter percebido uma sem-vergonhice: toda a motivação do nosso estudo gira em volta de obtermos uma representação de Fourier para sinais discretos, porque sinais discretos formam a classe de sinais que lidamos em um computador; nos capítulos anteriores eu afirmei, categoricamente e desavergonhadamente, que havíamos cumprido nosso objetivo com a DTFT. Mas isso não pode ser verdade, porque apesar da DTFT direta ser uma operação em um sinal discreto, ela resulta em um domínio *v* que é contínuo e, portanto, incompatível com operações computacionais. Nesse sentido a DTFT é praticamente inútil porque ela nos leva só até a metade do caminho. Mas ela não é nada inútil porque para chegar no nosso objetivo final, que é a DFT, precisamos primeiro aprender os conceitos da DTFT.

Acho que está claro para a maioria dos alunos a nossa motivação final: se queremos uma representação de Fourier para sinais discretos, queremos que tanto o sinal no domínio do "tempo" (que aqui é o domínio *n*), quanto o sinal no domínio da frequência sejam discretos. É aí que entra a DFT: ela converte o resultado da DTFT em um sinal discreto. Portanto a DFT vai converter o domínio contínuo *v* em um domínio discreto, que chamaremos de *k* (com *k* sendo um número inteiro).

Queremos então que a nossa representação espectral seja ela mesma discreta. Essas considerações nos levam à seguinte pergunta: seria possível recuperar $f[n]$ de amostras de $F(v)$? Em outras palavras: é necessário todo o espectro contínuo de v para que tenhamos uma representação de $f[n]$, ou apenas algumas amostras bastam? Se sim, quantas amostras precisamos? São essas as questões que tentaremos responder aqui.

Para abordar este problema, vamos rebobinar a fita e voltar na Transformada de Fourier (afinal de contas, já estabelecemos que, formalmente, a DTFT nada mais é que um caso particular da Transformada de Fourier). Suponha que tenhamos o seguinte par TF:

Equação 104

$$PAR \quad TF$$

$$TF \ Direta$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, exp(-i2\pi ft) \, dt$$

$$TF \ Inversa$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \, exp(i2\pi ft) \, df$$

Ao invés de nos perguntarmos se podemos recuperar $f[n]$ de amostras de sua DTFT, podemos nos perguntar simplesmente se podemos recuperar $x(t)$ de amostras da sua TF $X(f)$. Se a resposta para a segunda pergunta for sim, então automaticamente a resposta para a primeira pergunta também será sim, já que a DTFT é, formalmente, um caso particular da TF (ou seja, a DTFT é a TF de uma função multiplicado por um trem de impulso com espaçamento unitário). Então vamos focar na pergunta equivalente para a TF: é possível recuperar $x(t)$ de amostras de $X(f)$? Se sim, quantas amostras são necessárias?

O que aconteceria com $x(t)$ se pegarmos apenas algumas amostras de $X(f)$ para a calcular a TF inversa? Vamos supor que peguemos amostras espaças de $1/\Lambda$. Isso significa que vamos utilizar apenas as frequências $f_k = k/\Lambda$, onde k é um número inteiro (k vai ser sempre um número inteiro pra gente). Como calcularíamos a TF inversa utilizando apenas as frequências f_k? Neste caso, teríamos uma soma ao invés de uma integral:

Equação 105

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f_k)\, exp(i2\pi f_k t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f_k)\, exp\left(i2\pi \frac{k}{\Lambda} t\right)$$

Note o til no $x(t)$. Ele serve para diferenciar o x(t) obtido através de amostras de $X(f)$ (como na equação acima) com o $x(t)$ obtido com todo o espectro. Queremos saber qual é a diferença entre os dois. Para isso, basta você reconhecer que operação é essa na **Equação *105***: essa soma é a Série de Fourier inversa, com Λ desempenhando o papel de período (coloquei o par SF abaixo na **Equação *106*** para facilitar: note que esse par é absolutamente idêntico ao par SF da ***Equação 57***, eu só mudei a notação para ficar mais próxima do caso que estamos tratando). Então podemos interpretar $X(f_k)$ como sendo os coeficientes da série de Fourier com período Λ. Isso significa que, necessariamente, $\tilde{x}(t)$ é uma função periódica. Mas qual função periódica? Bom, isso depende de quem é $X(f_k)$, é claro. Sabemos que $X(f_k)$ é a TF de x(t) avaliada no ponto $f_k = k/\Lambda$. Então $X(f_k)$ é calculada pela integral da TF direta com $f = f_k$. Mas queremos interpretar $X(f_k)$ como sendo o coeficiente de uma série de Fourier. Ele seria o coeficiente da série de Fourier de qual função? Compare a integral da TF direta na **Equação *105*** (para $f = f_k$) com a integral da SF direta na **Equação *106***. Quais são as diferenças? Em primeiro lugar, o argumento da exponencial é absolutamente idêntico. Depois temos um termo 1/Λ multiplicando a SF direta que não aparece na TF, mas isso é só uma constante, então é moleza lidar com ele. A grande diferença é que a SF integra sobre um período enquanto a TF integra sobre todo o espaço temporal. Mas se $x(t)$ é um sinal, então $x(t)$ é limitado: ele começa em algum tempo e termina em algum tempo. Para facilitar o argumento, vamos supor que $x(t)$ tenha comprimento $2t_0$ e que x(t) esteja centrado em t = 0 (ou seja, $x(t)$ começa em $t = -t_0$ e termina em $t = +t_0$). Então, essa integral de -∞ a +∞ pode ser substituída por uma integral de $-t_0$ a + t_0. Agora, vamos supor que $\Lambda > 2t_0$. Se isso for verdade, então é claro que $\Lambda/2 > t_0$. Como a integral no intervalo de t_0 até qualquer valor maior que t_0 é 0 (já que x(t) é limitado em t_0), então poderemos expressar a integral como começando em $t = -\Lambda/2$ e terminando em $t = \Lambda/2$. Portanto, se $\Lambda > 2t_0$, então os intervalos da integral da TF direta podem ser $t = -\Lambda/2$ e $t = \Lambda/2$. Nesse caso, a integral da TF direta e a integral da SF direta são quase idênticas, a única diferença é o termo 1/ Λ multiplicando a integral.

Equação 106

$$PAR \quad SF$$

$$SF\ Direta$$

$$X[k] = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\frac{\Lambda}{2}} x(t)\, exp\left(-i2\pi\frac{k}{\Lambda}t\right)dt$$

$$SF\ Inversa$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X[k]\, exp\left(i2\pi\frac{k}{\Lambda}t\right)$$

O que tudo isso significa? Significa que, se $\Lambda > 2t_0$, então os coeficientes $X(f_k)$ são idênticos à série de Fourier de uma função periódica, com período Λ, e cujo período corresponde à função $x(t)$ multiplicada por Λ. Portanto, $\tilde{x}(t)$ é uma função periódica com período Λ e formada por repetições da função x(t), espaçadas de Λ e multiplicadas pelo fator Λ. Essas relações estão mostradas na **Figura *14***.

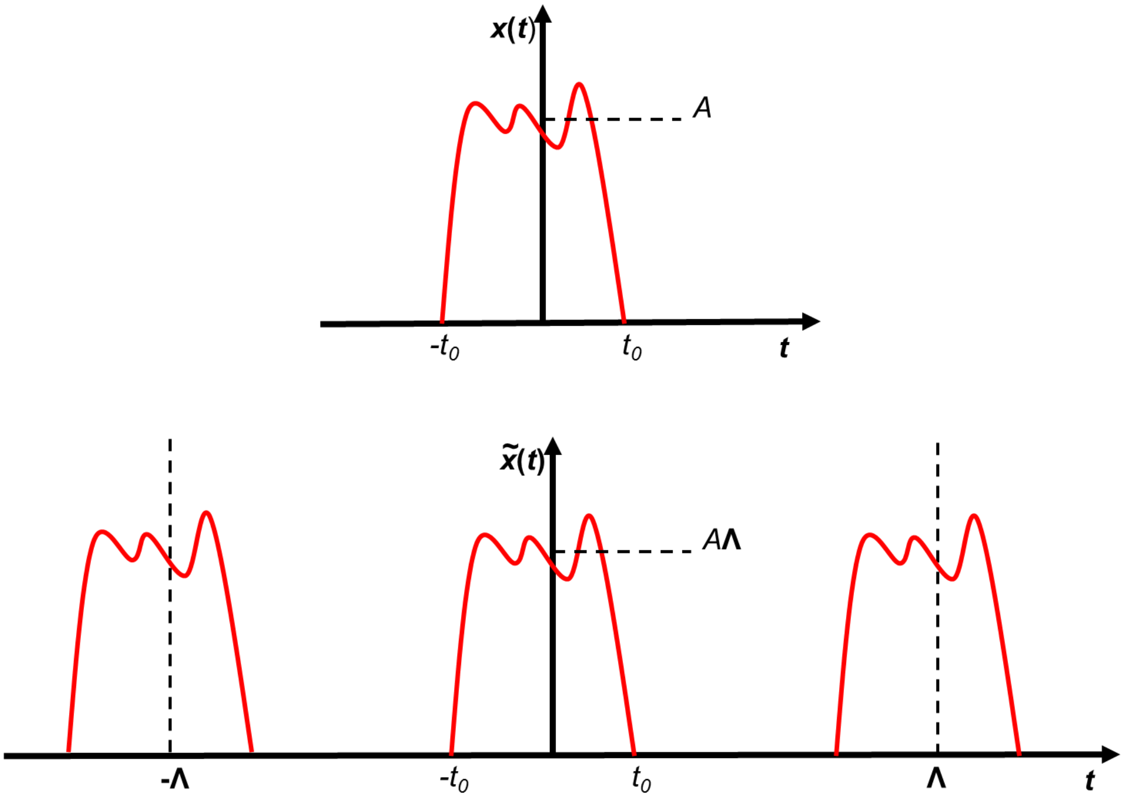


Figura 14

Então a resposta para a nossa pergunta se é possível recuperar $x(t)$ de amostras de $X(f)$ é: sim, é possível, já que $x(t)$ corresponde à um período de $\tilde{x}(t)$. E de quantas amostras precisamos? Resposta: suficiente para garantir que $\Lambda > 2t_0$. Qualquer semelhança com o teorema da amostragem não é mera coincidência: é absolutamente a mesma ideia, só colocada por um prisma diferente. Note a similaridade das operações: você viu anteriormente que a discretização no domínio do tempo resulta em uma periodicização no domínio da frequência; agora você viu que uma discretiazação no domínio da frequência resulta em uma periodicização no domínio do tempo. Ainda bem, senão teria algo estranho.

5.2 – A DFT

Então já sabemos que é possível representar um sinal x(t) através de amostras de sua TF: se a condição $\Lambda > 2t_0$ for satisfeita, estaremos efetivamente calculando a série de Fourier de um sinal periódico cuja período corresponde à x(t) (multiplicado por Λ).

Portanto, se a condição $\Lambda > 2t_0$ for satisfeita, é possível recuperar x(t) de amostras de sua TF.

Como podemos usar essa informação para o nosso propósito, que é recuperar um sinal discreto a partir de amostras de sua DTFT? Simples: como sabemos que a DTFT pode ser interpretada como um caso particular da TF, podemos pegar um sinal específico como exemplo, sinal este cuja TF seja formalmente igual à DTFT, e repetir o mesmo raciocínio da seção anterior, que levou aos resultados da **Figura *14***.

Qual sinal podemos usar então? Temos que utilizar um sinal cuja TF seja a DTFT de um sinal discreto. Mas já sabemos qual sinal temporal possui TF formalmente igual à DTFT: é o sinal temporal multiplicado pelo trem de impulsos, com Ts = 1. Então vamos considerar o sinal exemplo f_d(t) abaixo e vamos supor também que Ts = 1 seja suficiente para satisfazer o teorema da amostragem.

Equação 107

$$f_d(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$$

Para facilitar, vamos supor também que t_0 seja um número inteiro (isso não é necessário para a explicação em si, só a torna mais simples). As **Figura *15***a,b mostram um exemplo com t_0 = 4. Agora temos que escolher um período que satisfaça $\Lambda > 2t_0$. No nosso exemplo, temos que t_0 = 4, então Λ tem que ser no mínimo igual a 9. Vamos supor que escolhemos então Λ = 13. Mas vamos adaptar a notação para chamar a atenção para o fato que Λ é agora um número inteiro, então ao invés de chamar o período de Λ, vamos chama-lo de Np (que pode ser interpretado com número de pontos). Então temos $\Lambda = N_p = 13$ no nosso exemplo, como ilustrado na **Figura *15***c.

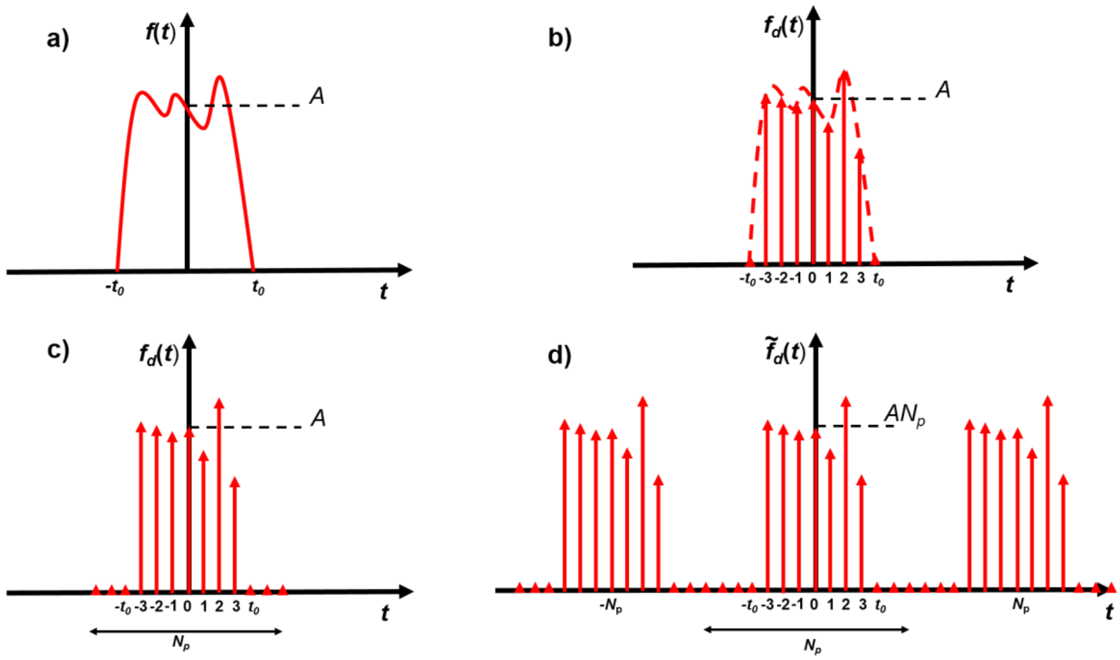


Figura 15

Já sabemos que se calcularmos a TF inversa de $f_d(t)$ utilizando apenas amostras de X(f), então teremos a função periódica com período $\Lambda = N_p$, como ilustrado na ***Figura 15***d.

Equação 108

$$\tilde{f}_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(f_k)\, exp(i2\pi f_k t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(f_k)\, exp\left(i2\pi \frac{k}{N_P} t\right)$$

Agora já estamos com a faca e o queijo na mão. Já sabemos que $F(f_k)$ corresponde à DTFT de $f[n] = f_d(nT_s)$ avaliada no ponto $v = f_k = k/N_p$, ou seja:

Equação 109

$$F(f_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, exp(-i2\pi f_k n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, exp\left(-i2\pi \frac{k}{N_p} n\right)$$

Como estamos calculando a DTFT de $f[n]$ apenas nos pontos $v = f_k$, podemos agora tratar a DTFT de $f[n]$ como uma função discreta, cujo índice é k. Portanto, podemos colocar a **Equação *109*** em uma forma mais adequada, que explicita a natureza discreta de $F(f_k)$. Reescrevendo então a **Equação *109***:

$$F[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \, exp(-i2\pi f_k n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \, exp\left(-i2\pi \frac{k}{N_p} n\right)$$

Podemos melhorar ainda mais a notação. Como o sinal $f[n]$ será um sinal limitado (no nosso exemplo o sinal $f[n]$ possui $2t_0 + 1 = 9$ pontos), não precisamos fazer a soma de -∞ a +∞: qualquer limite que seja maior que $2t_0 + 1$ serve. Vamos então escolher o limite indo de maneira que a soma contenha *N*p elementos (lembre-se que *N*p tem que ser maior que $2t_0$, então o menor valor de *N*p tem que ser $2*t_0 + 1$). Para isso, temos que fazer a soma de –(*N*p-1)/2 até (Np-1)/2. No nosso exemplo, Np = 13, então temos que fazer a soma de -6 até 6. Colocando o limite explicitamente no cálculo de *F*[k]:

Equação 110

$$F[k] = \sum_{n=-(Np-1)/2}^{(Np-1)/2} f[n] \, exp\left(-i2\pi \frac{k}{N_p} n\right)$$

Tudo bem então, até agora foi só perfumaria: na **Equação *110*** só reescrevemos a DTFT de maneira a explicitar que queremos apenas amostras da DTFT. Mas agora precisamos achar a operação inversa, que é o nosso objetivo principal. Já sabemos que se efetuarmos a soma de amostras da DTFT (**Equação *108***) obteremos a função $\tilde{f}_d(t)$ representada na **Figura *15***. O primeiro período dessa função contém o sinal original $f[n]$ multiplicado por Λ (ou seja, multiplicado por N_p). Então temos a relação:

Equação 111

$$f[n] = \frac{1}{N_p}\tilde{f}_d(nT_s) = \frac{1}{N_p}\tilde{f}_d(n) \quad para \quad -\frac{(N_p - 1)}{2} \le n \le \frac{(N_p - 1)}{2}$$

Onde colocamos explicitamente que vamos reter apenas os valores de *n* que fazem parte do período original. Como já sabemos como calcular $\tilde{f}_d(t)$ (pela **Equação *108***), estamos muito perto de determinar a transformada inversa de $F[k]$, ou seja, estamos perto de obtermos uma transformada inversa contendo apenas amostras de $F[k]$. Vamos resumir o que já encontramos: juntando a **Equação *111*** com a **Equação *108***:

Equação 112

$$f[n] = \frac{1}{N_p}\tilde{f}_d(n) = \frac{1}{N_p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]\, exp\left(i2\pi\frac{k}{N_p}n\right)$$
$$para \quad -\frac{(N_p-1)}{2} \le n \le \frac{(N_p-1)}{2}$$

Falta só um detalhe que na verdade é essencial para nós: note que a soma da **Equação *112*** vai de k = - ∞ a k = +∞. Se precisarmos realmente de infinitas amostras de *F*[k], não teremos chegado em lugar nenhum. Mas essa soma infinita não é necessária porque nós sabemos que a DTFT de *f*[*n*] é uma função periódica com período igual à 1. Se ela é periódica, podemos utilizar apenas um período para calcular a inversa (lembre-se que a DTFT inversa envolve uma integral sobre o primeiro período apenas). Então tudo o que temos que fazer é encontrar quais são os valores de k que correspondem ao primeiro período de $F[k]$. A conta é muito simples: estamos tomando amostras a cada intervalo $1/\Lambda = 1/N_p$. Então $1/N_p$ é o intervalo entre amostras da DTFT. Quantas amostras cobrem um período? Se o comprimento do período é 1 e o intervalo entre amostras é $1/N_p$, então obviamente temos $1/(1/N_p) = N_p$ amostras em um período. Então precisamos exatamente de N_p amostras para cobrir um período, o que significa que a soma da **Equação *108*** tem ter N_p elementos. Escolhendo novamente começar em $-(N_p - 1)/2$ e terminar em $(N_p - 1)/2$, temos que:

Equação 113

$$f[n] = \frac{1}{N_p}\sum_{k=-\frac{(Np-1)}{2}}^{\frac{(Np-1)}{2}} F[k]\, exp\left(i2\pi\frac{k}{N_p}n\right)$$
$$para \quad -\frac{(N_p-1)}{2} \le n \le \frac{(N_p-1)}{2}$$

Cumprimos então o nosso objetivo: combinando a **Equação *110*** com a **Equação *113*** temos, respectivamente, a transformada direta e inversa, ambos no domínio discreto. Por uma questão de didática (e um pouco de estética também), eu gosto de sinais simétricos, que começam em $-N_p/2$ e terminam em $N_p/2$. Entretanto, os vetores computacionais quase sempre começam em $n = 1$. Então vamos supor que você tenha algum sinal com 1024 pontos. O seu sinal vai estar armazenado em um vetor começando em $n = 1$ e terminando em $n = 1204$. É mais feio, porém mais usual, definirmos a soma como começando em $n = 1$ e terminando em $n = 1024$. Note neste exemplo que 1024 é o comprimento total do vetor, ou seja, $N_p = 1024$. Então, ao invés de fazermos a soma simétrica, como das **Equação *110*** podemos definir a soma como começando $n = 1$ e terminando em N_p. Note que isso é no fundo convenção: definir o começo e o fim da soma equivale a definir o tempo absoluto onde começa o sinal: você pode começar ele num tempo $t = -t_0$ (ou $n = -(N_p-1)/2$), que foi o que eu fiz até agora, ou começar ele no tempo $t = 0$, que é o que eu vou fazer agora; o importante é pegar os Np pontos que definem o seu vetor. Além disso, a soma da **Equação *113*** também pode começa em $k = 1$ e terminar em $k = N_p$, pois esse intervalo também cobre um período (só que ao invés de cobrir o período de -0.5 a 0.5 da DTFT, varrer k de 1 à Np corresponde ao período de 0 a 1 da DTFT). Com essa convenção (de começar em $n,k = 1$ e terminar em $n,k = N_p$), reescrevemos as das **Equação *110*** a **Equação *113*** para definirmos finalmente o par DFT:

Equação 114

$$\begin{gathered} PAR \quad DFT: \\ DFT \quad DIRETA \\ F[k] = \sum_{n=1}^{N_P} f[n]\, exp\left(-i2\pi \frac{k}{N_p} n\right) \quad para \quad 1 \le k \le N_p \\ DFT \quad INVERSA \\ f[n] = \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_P} F[k]\, exp\left(i2\pi \frac{k}{N_p} n\right) \quad para \quad 1 \le n \le N_p \end{gathered}$$

5. 3 Considerações sobre a DFT

Na definição do par DFT colocamos explicitamente que tanto n como k devem ser calculado entre 1 e N_p. Isso não significa que, se você calcular a DFT direta para $k = N_p + 3$, ou a DFT inversa para $n = -4$, o universo vai entrar em colapso. Isso só significa que não faz muito sentido você considerar os valores fora do primeiro período já que $F[k + N_p] = F[k]$ e $f[n+N_p] = f[n]$ (você tem que conseguir provar essas duas relações sozinho(a) utilizando a DFT direta e inversa, respectivamente). Mas, na prática, o que é N_p ? Na prática, N_p é o comprimento do vetor onde você armazenou o sinal. Então, se você me der um vetor com comprimento $N_p = 512$, e me pedir a DFT, eu vou te devolver um vetor também com comprimento $N_p = 512$. E se você me pedir a DFT inversa, eu vou te devolver o vetor original com $N_p = 512$ pontos de novo. Então, na prática, a gente calcula somente o primeiro período tanto de $f[n]$ como de $F[k]$. Mas a periodicidade inerente à $f[n]$ e à $F[k]$ tem consequências importantes, que serão discutidas com mais detalhes na próxima seção.

Uma outra consideração relevante é a respeito do significado de k em $F[k]$. Ao que corresponde o ponto k no vetor $F[k]$? Por exemplo, qual o significado de $F[k = 3]$? Não é difícil responder a essa pergunta (que, na verdade, já foi respondida na seção anterior). Se você comparar a definição da DFT direta com a DTFT direta, você vai ver que o ponto $F[k]$ da DFT corresponde ao ponto $F(\mathrm{v} = k/N_p)$ da DTFT. Por exemplo, se $N_p = 100$, então $F[k = 3] = F(v = 3/100)$. Então, por exemplo, se $N_p = 100$ e a DTFT de $f[n]$ é tal que $F(0.03) = 4.2$, então $F[3] = 4.2$ Novamente: a DFT nada mais é do que amostras da DTFT.

Para você testar se entendeu mesmo, considere o seguinte problema: você recebe um certo vetor qualquer $x[n]$ com comprimento N. Se você der o comando $X = fft(x)$ no Matlab, o vetor X será a **DFT** de x. Mas você quer plotar a DTFT de x. Então você precisa de um vetor v para o eixo de frequências tal que o resultado do comando plot(v,abs(X)) seja a DTFT de x. Você consegue definir o vetor v? Se sim, você entendeu. Se não, não entendeu.

Qual é a diferença entre a DFT e a DTFT? Se você comparar a DFT direta com a DTFT direta, você vai notar que elas são quase iguais. A única diferença é que a DTFT direta é calculada para um valor qualquer de frequência v, enquanto a DFT é calculada apenas para os valores de v que satisfazem $v = k/\Lambda$. Agora, a DFT inversa é bem diferente da DTFT inversa: enquanto a DTFT inversa é uma integral, a DFT inversa é uma soma, que é exatamente o que queríamos. Mas existe uma diferença ainda mais importante entre as duas: suponha que o seu sinal $f[n]$ seja limitado entre $n = 3$ e $n = 12$. Isso quer dizer que o seu sinal $f[n]$ é diferente de zero somente para $n = 3,4...12$. Vamos supor também que $N\mathrm{p} = 100$. Se você calcular a DTFT inversa de $f[n]$ para QUALQUER valor de n que não esteja entre $n = 3$ e $n = 12$, você vai encontrar $f[n] = 0$.

Por outro lado, se você calcular a DFT inversa para $f[n = 3+N_p]$, ou seja, se você calcular a DFT inversa para $f[303]$, você vai encontrar necessariamente que $f[303] = f[3]$. De maneira geral $f[n] = f[n+N_p]$ para a DFT, sempre (espero que você já tenha provado isso). Mas você deve estar se perguntando porque isso é relevante, uma vez que fixamos que a DFT inversa será calculada apenas para n entre 1 e N_p. Na verdade, como já disse no parágrafo anterior, e repito aqui novamente, a periodicidade inerente à $f[n]$ é de suma importância para compreender algumas propriedades peculiares à DFT, como veremos na próxima seção.

5.4 Propriedades da DFT

Você já deve imaginar que as propriedades da DFT devem ser similares às da DTFT. Isso é verdade, mas a periodicidade inerente à DFT causa algumas modificações. Eu não vou repetir as propriedades da DFT uma por uma aqui, eu acredito que você seja capaz de deduzir sozinho que a DFT é linear, etc, etc. Ao invés disso, eu vou focar naquilo que diferencia as propriedades da DFT das propriedades da DTFT. São duas as principais diferenças: a propriedade de deslocamento temporal da DTFT vira a propriedade de deslocamento circular da DFT e a propriedade da convolução temporal da DTFT vira a propriedade de convolução circular para a DTFT. Para compreender essas duas diferenças você tem que sempre lembrar da periodicidade inerente ao par DFT.

5.4.1 A propriedade do deslocamento circular

Na seção 3.2.4 vimos a propriedade do deslocamento "temporal" da DTFT. Para facilitar, vou repetir aqui o resultado já provado anteriormente:

Equação 115

$$F_2(\nu) = exp(-i2\pi\nu \cdot n_0)\, F(\nu)$$
$$quando$$
$$f_2[n] = f[n - n_0]$$

Como a DFT corresponde a amostras da DTFT, não é de se surpreender que exista uma propriedade análoga para a DFT. Entretanto, existe uma diferença importantíssima advinda da periodicidade inerente à DFT.

Suponha que tenhamos um sinal *f*[*n*] com DFT *F*[*k*]. Suponha também que definimos o vetor *G*[*k*] da seguinte forma:

Equação 116

$$G[k] = exp\left(-i2\pi\frac{k}{N_p}\cdot n_0\right)F[k]$$

Qual o resultado da DFT inversa de *G*[*k*]? Comparando a **Equação *115*** com a **Equação *116***, esperamos que a DFT inversa de *G*[*k*] seja $f[n\text{-}n_0]$. Podemos verificar isso calculando a DFT inversa de *G*[*k*] diretamente:

Equação 117

$$g[n] = \frac{1}{N_p}\sum_{k=1}^{N_P} G[k]\, exp\left(i2\pi\frac{k}{N_p}n\right)$$

Substituindo a **Equação *116*** na **Equação *117***:

Equação 118

$$g[n] = \frac{1}{N_p}\sum_{k=1}^{N_P} F[k]\, exp\left(-i2\pi\frac{k}{N_p}\cdot n_0\right)exp\left(i2\pi\frac{k}{N_p}n\right)$$

$$= \frac{1}{N_p}\sum_{k=1}^{N_P} F[k]\, exp\left[i2\pi\frac{k}{N_p}(n-n_0)\right]$$

Como *F*[*k*] é a DFT de *f*[*n*], então é óbvio que:

$$f[n] = \frac{1}{N_p}\sum_{k=1}^{N_P} F[k]\, exp\left(i2\pi\frac{k}{N_p}n\right)$$

Se, ao invés do ponto *n*, quiséssemos o ponto $n - n_0$, teríamos:

Equação 119

$$f[n-n_0] = \frac{1}{N_p}\sum_{k=1}^{N_P} F[k]\, exp\left[i2\pi\frac{k}{N_p}(n-n_0)\right]$$

Comparando a **Equação *119*** com a **Equação *118***, chegamos à conclusão que:

Equação 120

$$g[n] = f[n - n_0]$$

Mas isso é verdade? A resposta vem de direto de Brasília: veja bem, é e não é verdade. Se você entender que $g[n]$ e $f[n]$ são o que são, então é verdade. Se você entender $g[n]$ e $f[n]$ como a sua janela computacional, então não é verdade. Vou explicar melhor.

Se você entender que $g[n]$ e $f[n]$ são o que são, então você deve tratar $g[n]$ e $f[n]$ como funções periódicas com período N_p. Para tentar amenizar a confusão, vamos chamar as funções periódicas de $\tilde{g}[n]$ e $\tilde{f}[n]$. Assim, **é sempre verdade que**:

Equação 121

$$\tilde{g}[n] = \tilde{f}[n - n_0]$$

Agora, se você tratar $g[n]$ e $f[n]$ como a sua janela computacional, então a **Equação *120*** nem sempre é verdade, porque n_0 pode ser grande o suficiente para fazer com que um período “invada” o outro. Essa situação é melhor ilustrada por meio de um exemplo: na **Figura *16***a temos um exemplo de um sinal $f[n]$, o qual vamos deslocar temporalmente utilizando a propriedade do deslocamento (ou seja, vamos modular a DFT de acordo com a **Equação *117*** e em seguida calcular a inversa). A **Figura *16***a mostra então a nossa janela computacional. Na **Figura *16***b temos o sinal periódico, que é o que existe na verdade (o quadrado pontilhado destaca a janela computacional referente ao sinal periódico). O mais importante aqui é entender que quando aplicamos a propriedade do deslocamento, estamos deslocando o sinal da **Figura *16***b, e não o sinal da **Figura *16***a. Coloquei dois exemplos do que ocorre. No exemplo da **Figura *16***c, temos o sinal deslocado de 2 unidades. Note que o sinal ainda está dentro da janela computacional (que está destacada pelo quadrado pontilhado). Então, o que você vai ver no seu computador é o resultado da **Figura *16***e, e você vai concluir naturalmente que a propriedade da **Equação *120*** é verdade. Entretanto, se você deslocar de 4 unidades, como representado na **Figura *16***d, então parte do sinal sai da janela computacional.

Além disso, parte do período anterior entra na janela computacional. O que você enxerga no seu computador é, portanto, o sinal da **Figura *16***f. Esse sinal não satisfaz a condição da **Equação *120***. O que ocorre é que o sinal volta atrás na janela computacional. Daí o nome “deslocamento circular”, que se refere ao fato de que a impressão que temos é que sinal saiu da janela, deu meia volta e entrou no começo da janela.

Assim, sempre que você for usar a DFT, lembre-se que você está trabalhando com sinais periódicos. Isso basta para você entender um monte de propriedades da DFT, inclusive a próxima (convolução circular), que é a mais importante.

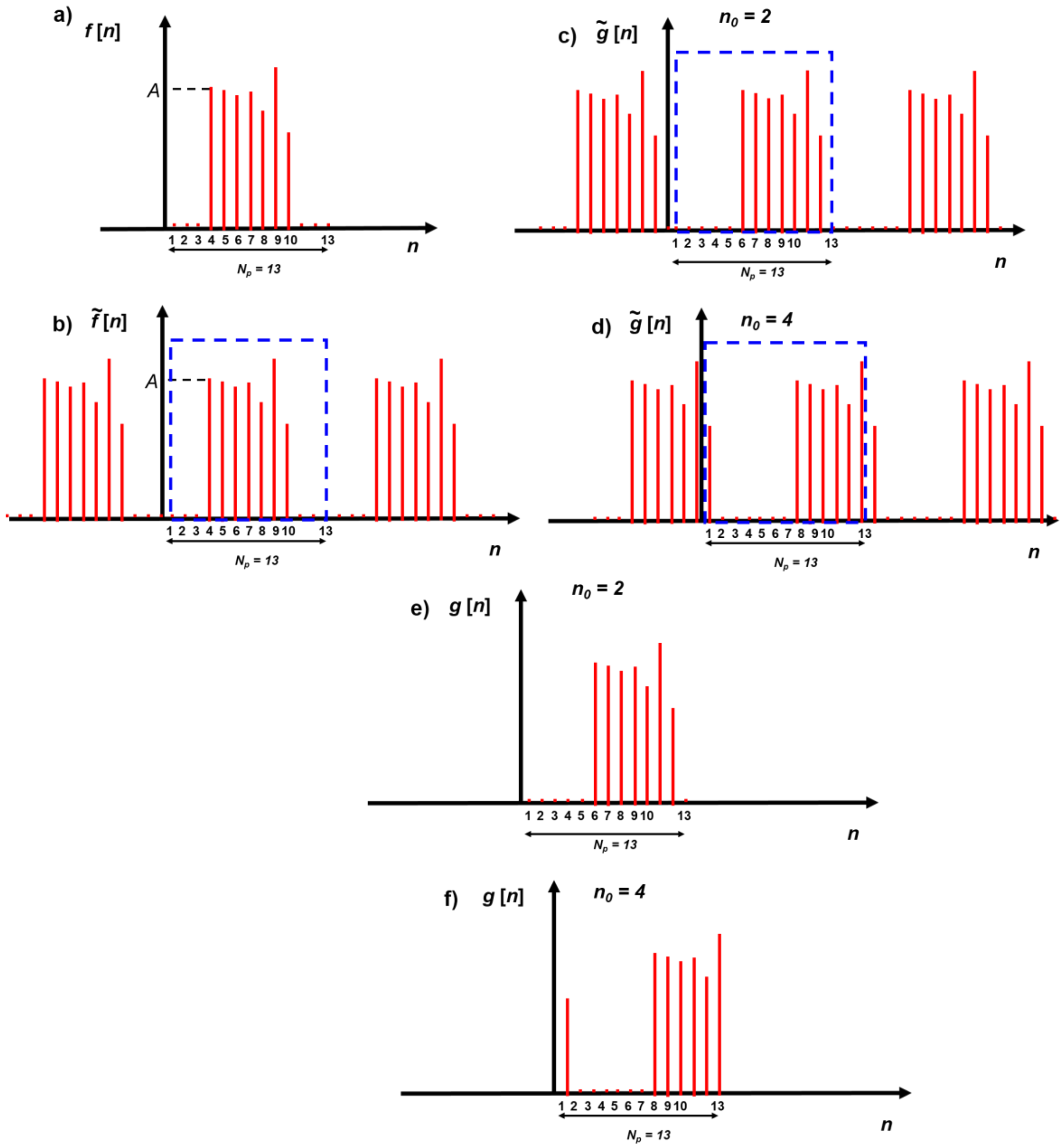


Figura 16

5.4.2 A propriedade da convolução circular

Outro fenômeno de suma importância para um adequado entendimento da DFT é a convolução circular. Esse termo denota a convolução entre duas funções periódicas. Como efetivamente a DFT é a série de Fourier de uma função periódica, se multiplicarmos a DFT de $f[n]$ pela DFT de $g[n]$, estaremos efetivamente multiplicando os coeficientes da série de Fourier de $\tilde{f}[n]$ pelos coeficientes da série de Fourier de $\tilde{g}[n]$. Pela propriedade da convolução da série de Fourier, já sabemos que o resultado ($Z[k]=F[k]G[k]$) será a série de Fourier de $\tilde{z}[n]$, onde $\tilde{z}[n]=\tilde{f}[n]*\tilde{g}[n]$. Então sem fazer nenhuma conta nós já sabemos o que acontece quando você multiplica a DFT de dois sinais: o sinal resultante é o primeiro período da convolução periódica entre os sinais. Em notação formal temos então:

Equação 122

$$
\begin{aligned}
&Se \\
&Z[k] = F[k]G[k] \\
&então \\
&z[n] = \tilde{z}[n] \quad para \quad 1 \le n \le N_p \\
&onde \\
&\tilde{z}[n] = \tilde{f}[n] * \tilde{g}[n]
\end{aligned}
$$

Formalmente é isso. A **Equação *122*** contém todas as informações que você precisa saber a respeito da propriedade da convolução circular na DFT. Mas é bom explicitar algumas coisas importantes em relação à essa propriedade.

Pense o seguinte: em qual situação você utilizaria essa propriedade? Muito provavelmente, a resposta seria: se eu tiver dois sinais e quiser a convolução entre eles; afinal de contas, o jeito mais fácil de calcular a convolução entre dois sinais é através da multiplicação no domínio da frequência. Mas muito, muito provavelmente, você vai estar interessado na convolução **linear** entre $f[n]$ e $g[n]$, e não na convolução circular (afinal de contas, os seus sinais de interesse são $f[n]$ e $g[n]$, e não $\tilde{f}[n]$ e $\tilde{g}[n]$). Lembre-se que a convolução linear só pode ser calculada com a DTFT (veja seção 3.2.6). Daí você pode se perguntar: o primeiro período da convolução circular (ou seja, $z[n]$ na **Equação *122***) é igual à convolução **linear** entre $f[n]$ e g[n]? Responder a essa pergunta é o principal objetivo dessa seção.

A resposta é: depende. Se a janela computacional for grande o suficiente, a resposta é sim. Se não, não. Vamos ver o que exatamente eu quero dizer com grande o suficiente, e por que uma janela pequena dá zebra.

Apesar da DFT ser definida para um sinal começando em $n = 1$ e terminando em $n = N_p$, é mais fácil de visualizar o problema do tamanho da janela computacional se considerarmos um sinal simétrico (centrado em $n = 0$). Na verdade, a única coisa que muda se o sinal não for simétrico é que o resultado estará deslocado no tempo (por que?), ou seja, não muda praticamente nada, porque o tempo que o sinal começa geralmente não é de interesse.

Então vamos voltar nos dois sinais que utilizamos como exemplo na seção 3.2.6 (veja **Figura *13***). Na **Figura *13*** temos o resultado da convolução linear entre os sinais $f[n]$ e $g[n]$. Se você quisesse fazer o cálculo do exemplo da **Figura *13*** no domínio da frequência no computador, você teria que usar a DFT e não a DTFT (já que a DFT é discreta e a DTFT é contínua). Então você estaria fazendo efetivamente a convolução circular entre os sinais. E qual é o período dos sinais periódicos? Nós já vimos que o período é a própria janela computacional (se essa frase te é estranha pare tudo e re-estude as seções 5.1 e 5.2). Então se a janela computacional tem N_p elementos, o período é N_p. Na **Figura *17*** temos o exemplo da convolução circular entre os mesmos sinais $f[n]$ e $g[n]$, supondo uma janela computacional de tamanho $N_p = 5$. A janela computacional está destacada pelo quadrado pontilhado (ela vai de $n = -2$ até $n = 2$ neste exemplo). Note como o resultado da convolução circular neste caso é idêntico ao da convolução linear (compare os valores de z obtidos na **Figura *17*** com os valores obtidos na **Figura *13***). Neste caso, a janela computacional é grande o suficiente para que não ocorra interferência entre os períodos. Outra maneira de entender o problema é que relacionar os diversos comprimentos envolvidos. Os sinais $f[n]$ e g[n] têm ambos comprimentos iguais a 3, o que significa que o resultado da convolução circular deles tem comprimento 2*3 – 1 = 5. Como a janela computacional tem comprimento também igual à 5, o resultado da convolução linear “cabe” na janela computacional e, portanto, o resultado da convolução circular é idêntico ao resultado da convolução linear. Portanto, neste exemplo, se multiplicarmos a DFT de $f[n]$ pela DFT de $g[n]$ e calcularmos a DFT inversa dessa multiplicação, o sinal $z[n]$ que vamos obter corresponde à convolução linear entre $f[n]$ e $g[n]$.

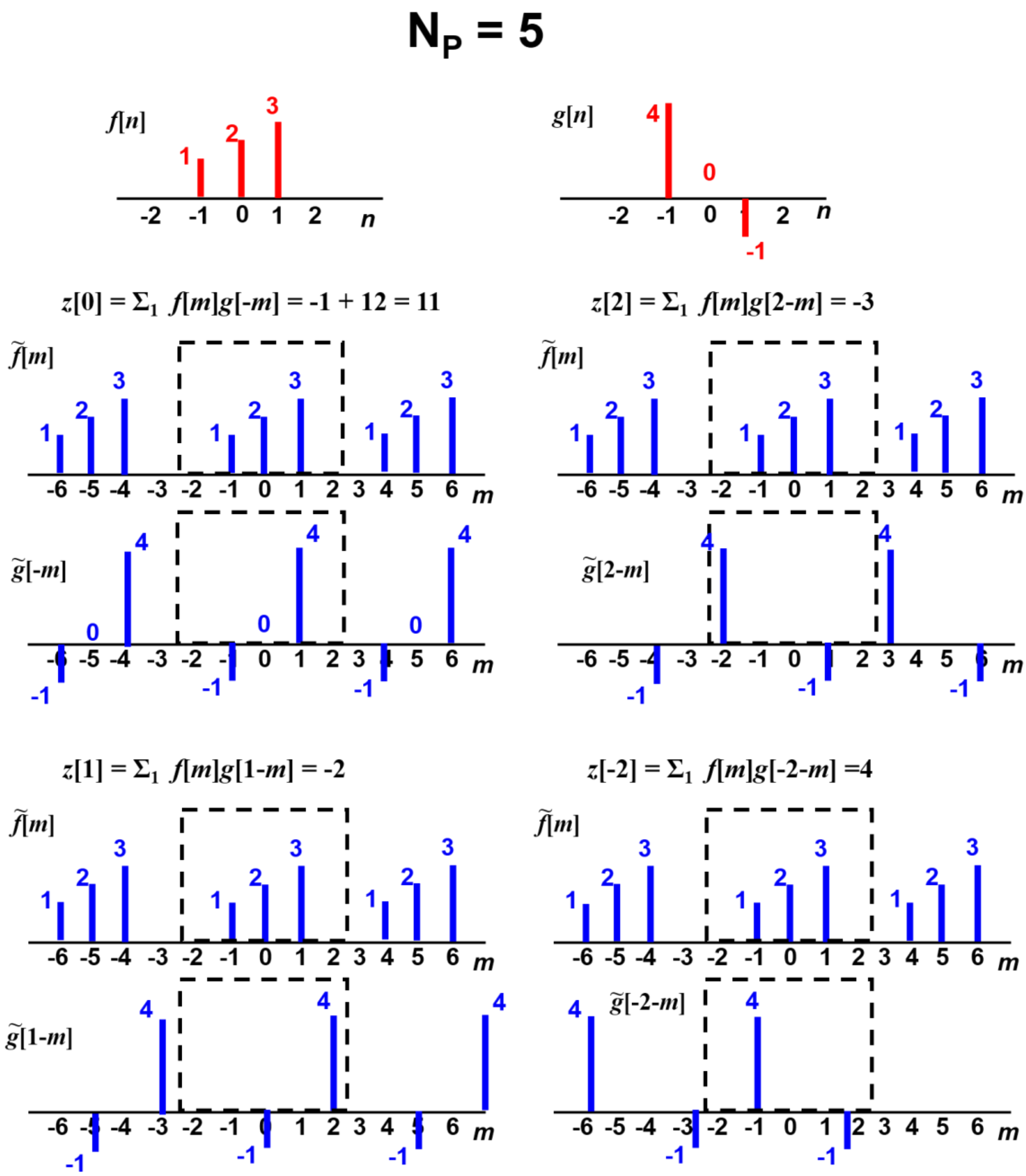


Figura 17 Convolução circular entre *f*[*n*] e *g*[*n*] com N_P = 5. Neste caso, o resultado da convolução circular é idêntico ao resultado da convolução linear.

Mas isso nem sempre é verdade. Se a janela computacional não for grande o suficiente, um período acaba interferindo no próximo e o resultado da convolução circular pode ser completamente diferente do resultado da convolução linear. A **Figura *18*** mostra um exemplo de como isso acontece. Neste exemplo, temos a convolução entre os mesmos sinais *f*[*n*] e *g*[*n*], mas agora a janela computacional tem comprimento N_p = 3, ou seja, a janela computacional começa em n = -1 e termina em n = 1. Note como os valores de $z[n]$ encontrados na convolução circular com N_p = 3 não são iguais ao da convolução linear. Por exemplo, na convolução linear temos $z[2]$ = -3, enquanto na convolução circular com N_p = 3 temos $z[2]$ = 5. Portanto, neste exemplo a janela computacional não foi grande o suficiente, o que fez com que os períodos adjacentes interferissem no resultado da convolução. Neste exemplo, $z[n]$ não tem nada a ver com a convolução linear entre $f[n]$ e $g[n]$.

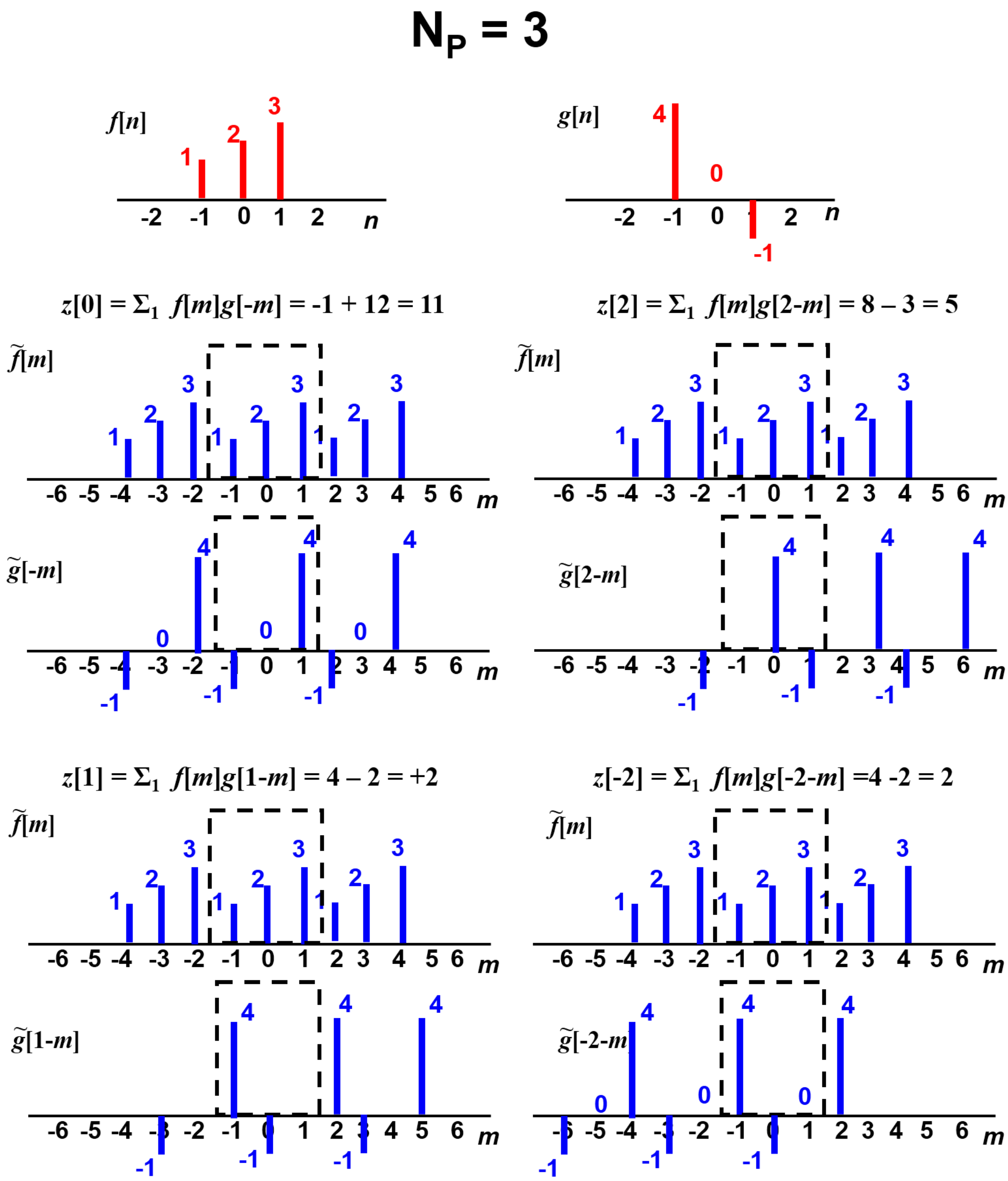


Figura 18 Convolução circular entre $f[n]$ e $g[n]$ com N_p = 3. Neste caso, o resultado da convolução circular é diferente do resultado da convolução linear.

5.5 Teorema de Parseval para a DFT

O último tópico que vamos tratar é o teorema de Parseval para a DFT. Esse tópico é importante porque ele relaciona a energia do sinal discreto (veja o capítulo 4) no domínio *n* com a energia no domínio *k*, ou seja, relaciona a energia do sinal no domínio discreto temporal com a energia no domínio espectral.

Matematicamente, o que queremos é expressar a energia do sinal em termos da sua DFT. Então suponha que temos um sinal $x[n]$ armazenado em um vetor com comprimento N_p (claro que estou assumindo que N_p é maior que o comprimento do sinal). A energia do sinal discreto será:

Equação 123

$$E = \sum_{n=1}^{N_P} |x[n]|^2$$

Queremos expressar a equação acima em termos da DFT de $x[n]$. Para isso, vamos expressar $x[n]$ explicitamente em termos de sua DFT:

Equação 124

$$x[n] = \frac{1}{N_P} \sum_{k=1}^{N_P} X[k] \, exp\left(i2\pi \frac{k}{N_P} n\right)$$

Note também que:

Equação 125

$$x^*[n] = \frac{1}{N_P} \sum_{k=1}^{N_P} X^*[k] \, exp\left(-i2\pi \frac{k}{N_P} n\right)$$

E, portanto:

$$|x[n]|^2 = \left[\frac{1}{N_P} \sum_{k=1}^{N_P} X[k] \, exp\left(i2\pi \frac{k}{N_P} n\right)\right] \left[\frac{1}{N_P} \sum_{k=1}^{N_P} X^*[k] \, exp\left(-i2\pi \frac{k}{N_P} n\right)\right]$$

Podemos agrupar os dois termos:

$$|x[n]|^2 = \frac{1}{N_P^2}\sum_{k=1}^{N_P}\sum_{q=1}^{N_P} X[k]\, exp\left(i2\pi\frac{k}{N_P}n\right) X[q]\, exp\left(-i2\pi\frac{q}{N_P}n\right)$$

Ou seja:

Equação 126

$$|x[n]|^2 = \frac{1}{N_P^2}\sum_{k=1}^{N_P}\sum_{q=1}^{N_P} X[k]\, X^*[q]\, exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right)$$

Onde q, é claro, é um número inteiro. Substituindo a **Equação *126*** na **Equação *123*** teremos:

Equação 127

$$E = \sum_{n=1}^{N_P}|x[n]|^2 = \sum_{n=1}^{N_P}\frac{1}{N_P^2}\sum_{k=1}^{N_P}\sum_{q=1}^{N_P} X[k]\, X^*[q]\, exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right)$$

Note que o único termo que depende de n é a exponencial. Portanto, é razoável que tentemos determinar primeiro o resultado da soma em n. Para facilitar a notação, vou chamar a soma em n de S e escrevê-la explicitamente:

Equação 128

$$S = \sum_{n=1}^{N_P} exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right)$$

É claro que o resultado de S depende de $k - q$ e precisamos encontrar o valor de S para todas as combinações possíveis de $k - q$. Antes de você entrar em desespero com essa tarefa hercúlea, comecemos pelo caso mais simples: suponha que $k - q = 0$. Neste caso, a exponencial é igual à 1 e soma consiste simplesmente em somar 1 N_p vezes, ou seja:

Equação 129

$$S = \sum_{n=1}^{N_P} exp\left(i2\pi \frac{k-q}{N_P} n\right) = N_P \quad para \quad k-q=0$$

E para $k - p$ diferente de zero? Não é tão difícil achar o resultado da soma da **Equação *128***. Basta utilizar o velho truque de deslocar soma de um elemento. Para isso, considere a soma S_2 definida como:

Equação 130

$$S_2 = exp\left(i2\pi \frac{k-q}{N_P}\right) S$$

Note que na definição de S_2 o *n* não aparece na exponencial que multiplica S. Isso quer dizer que essa exponencial é uma constante para a soma (ou seja, a mesma exponencial é multiplicada por todos os termos da soma *S*). Portanto, podemos colocar essa exponencial dentro da soma, ou seja:

$$S_2 = exp\left(i2\pi \frac{k-q}{N_P}\right) S = \left[\sum_{n=1}^{N_P} exp\left(i2\pi \frac{k-q}{N_P} n\right) exp\left(i2\pi \frac{k-q}{N_P}\right)\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{N_P} exp\left(i2\pi \frac{k-q}{N_P} n + i2\pi \frac{k-q}{N_P}\right)$$

Re-arranjando:

$$S_2 = \sum_{n=1}^{N_P} exp\left[i2\pi \frac{k-q}{N_P} (n+1)\right]$$

Note que essa soma começa efetivamente em n = 2 e termina em n = $N_p + 1$. Portanto podemos reescreve-la como:

$$S_2 = \sum_{n=2}^{N_P+1} exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right]$$

Portanto:

Equação 131

$$S_2 = exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}\right)S = \sum_{n=2}^{N_P+1} exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right]$$

Subtraindo S_2 de S:

$$S_2 - S = \left[1 - exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}\right)\right]S = \sum_{n=2}^{N_P+1} exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right] - \sum_{n=1}^{N_P} exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right]$$

Como a primeira soma (S_2) vai de n = 2 até $n = N_p$ +1 e a segunda soma (S) vai de n = 1 até $n = N_p$, só vão sobrar o termo $n = N_p$ +1 de S_2 e o termo n = 1 de S. Portanto:

$$\left[1 - exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}\right)\right]S = exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}(N_p+1)\right] - exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}1\right]$$

Ou seja:

$$S = \frac{exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}(N_p+1)\right] - exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}1\right]}{\left[1 - exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}\right)\right]}$$

Vamos desmembrar a primeira exponencial:

$$exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}(N_p+1)\right] = exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}(N_p)\right]\cdot exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}1\right]$$
$$= exp[i2\pi(k-q)]\cdot exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}1\right]$$

Como $k - q$ é um número inteiro, temos que $\exp[i2\pi(k-q)] = 1$. Daí que

$$exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}\left(N_p+1\right)\right] = exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}1\right]$$

Portanto:

$$S = \frac{exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}\left(N_p+1\right)\right] - exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}1\right]}{\left[1-exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}\right)\right]}$$
$$= \frac{exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}1\right] - exp\left[i2\pi\frac{k-q}{N_P}1\right]}{\left[1-exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}\right)\right]} = 0$$

Juntando esse resultado com o resultado para $k - q = 0$ temos:

Equação 132

$$S = \sum_{n=1}^{N_P} exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right) = 0 \quad para \quad k-q \neq 0$$
$$S = \sum_{n=1}^{N_P} exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right) = N_P \quad para \quad k-q = 0$$

Como a soma em n só é diferente de zero quando $k = q$, então a soma dupla (em k e q) da **Equação *127*** é reduzida à uma soma simples. Assim, utilizando a ***Equação 132*** na **Equação *127*** temos:

$$E = \sum_{n=1}^{N_P}|x[n]|^2 = \sum_{n=1}^{N_P}\frac{1}{N_P^2}\sum_{k=1}^{N_P}\sum_{q=1}^{N_P}X[k]\,X^*[q]\,exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right)$$
$$= \frac{1}{N_P^2}\sum_{k=1}^{N_P}\sum_{q=1}^{N_P}X[k]\,X^*[q]\sum_{n=1}^{N_P}exp\left(i2\pi\frac{k-q}{N_P}n\right) = N_P\frac{1}{N_P^2}\sum_{k=1}^{N_P}X[k]X^*[k]$$

Ou seja:

Equação 133

$$E = \sum_{n=1}^{N_P} |x[n]|^2 = \frac{1}{N_P} \sum_{k=1}^{N_P} |X[k]|^2$$

Esse é o teorema de Parseval para a DFT. Juntando esse teorema com o que você aprendeu no capítulo 4, você tem que ser capaz de deduzir qual é o valor da energia do sinal **contínuo** tendo apenas a DFT do sinal discreto.

As principais diferenças entre sinais discretos e sinais contínuos são estabelecidas pelas propriedades da DTFT e da DFT. Sabendo bem essas propriedades, você vai poder caminhar em segurança quando tiver que fazer processamento digital de sinais. Nos dois próximos capítulos voltaremos nossa atenção para sistemas discretos. O capítulo 6 descreve as propriedades de sistemas LTI discretos, que é muito análoga ao de sistemas LTI contínuos. O capítulo 7 trata da transformada z, que é a versão da transformada de Laplace para sinais e sistemas discretos.

6 – Sistemas Discretos

Bibliografia recomendada para este capítulo: Oppenheim, Discrete-time Signal Processing, Cap 2, seção 2.2.

Em engenharia estamos sempre interessados em gerar, manipular e detectar sinais. Damos o nome de geradores para as coisas que geram sinais (porque somos super criativos), detectores para as coisas que detectam (viu?) e sistemas para as coisas que manipulam sinais. Esta última função é a tratada neste capítulo.

No caso do domínio contínuo, os sinais geralmente representam alguma grandeza física, como por exemplo a tensão em um circuito. Neste caso, o sistema será algo físico, que atuará no sinal físico. O exemplo mais comum é um filtro de frequências, que pode ser implementado utilizando circuitos RLC. Em geral, um sistema é qualquer coisa que altere o sinal. Mas e no caso de sinais discretos? Vimos que sinais discretos são simplesmente uma sequência de números. Então um sistema discreto nada mais pode ser do que uma coisa que altera uma sequência de números. Em outras palavras, um sistema discreto nada mais é que uma operação matemática que você faz em uma sequência de números. Essa operação matemática pode e não pode representar algo físico. Ela pode ser uma operação arbitrária ou pode simplesmente ser uma operação que descreve o comportamento de um sistema físico. Nesse último caso, o sistema discreto deve guardar uma relação próxima ao sistema contínuo.

Por exemplo, um circuito RLC é um sistema que operam em sinais elétricos. Sabemos da teoria de circuitos que o sistema RLC é representado por um operador que contém derivadas de primeira e/ou segunda ordem. Para tornar o exemplo mais concreto, considere um sistema simples, dado por um circuito RC, onde a entrada é a tensão de alimentação e a saída é a tensão no capacitor, como mostrado na **Figura *19***.

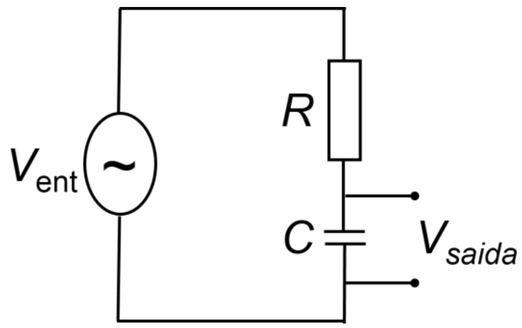


Figura 19 Exemplo de sistema físico (contínuo)

Pela teoria de circuitos, sabemos que a entrada e a saída desse circuito estão relacionadas por uma equação diferencial de primeira ordem:

Equação 134

$$RC\,\frac{dV_{saida}}{dt} + V_{saida}(t) = V_{entrada}(t)$$

A relação acima contém todas as informações do sistema "circuito RC". Se fossemos estudar este sistema no computador, teríamos uma sequência $x[n]$ representando o sinal de entrada (e já sabemos que $x[n]$ carrega todas as informações do sinal contínuo, desde que o teorema da amostragem seja respeitado) e um sinal $y[n]$ representando o sinal de saída (que é o que desejamos conhecer).

O sistema contínuo RC seria então representado por um sistema discreto, onde as derivadas temporais são substituídas por uma operação de diferenças:

Equação 135

$$\frac{RC}{T_S}(y[n] - y[n-1]) + y[n] = x[n]$$

E a nossa tarefa seria obter $y[n]$ dado $x[n]$. Esse é um exemplo de um sistema discreto (uma operação matemática) que representa um sistema físico (o circuito RC).

Resumindo: um sistema discreto é uma operação matemática que modifica uma sequência de números (o sinal discreto) e pode (ou não) representar um sistema físico.

Uma vez definido o que é um sistema discreto, podemos classificá-los de acordo com algumas propriedades, que são bem análogas às propriedades de sistemas contínuos. As mais importantes são:

6. 1 Linearidade

Um sistema discreto é linear se, dada duas entradas $x_1[n]$ e $x_2[n]$ com saídas $y_1[n]$ e $y_2[n]$, respectivamente, a seguinte condição é satisfeita:

Equação 136

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

Igualzinho a propriedade de linearidade para sistemas contínuos.

6.2 Sistemas com memória e sem memória.

Sistemas com memória são aqueles cuja saída $y[n]$ para qualquer valor de n depende apenas do valor de $x[n]$ para o mesmo n. Por exemplo, $y[3]$ depende só de $x[3]$.

Exemplo de sistema sem memória: $y[n] = |x[n]|^2$.

Exemplo de sistema com memória: $y[n] = x[n] + x[n - n_d]$ onde n_d pode ser tanto negativo como positivo.

6.3 Sistemas causais.

Um sistema é causal se a sua saída em $n = n_0$ depender somente de $n \leq n_0$. Assim como no tempo contínuo, a causalidade expressa o fato de que o sistema só responde ao sinal que já foi aplicado (presente e passado), mas não ao sinal que ainda não foi aplicado (futuro). É claro que todo sistema físico é causal, mas como um sistema discreto não precisa necessariamente representar um sistema físico, é comum encontrar sistemas discretos não causais.

Exemplos de Sistemas Causais.

1 - $y[n] = |x[n]|^2$

2 - $y[n] = x[n] - x[n-1]$

3 - $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x[n-k]$

Exemplos de Sistemas Não Causais.

1 - $y[n] = x[n] - x[n+1]$

2 - $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x[n-k]$

3 - $y[n] = x[nM]$

6.4 Sistemas Estáveis

Estabilidade é uma das propriedades mais importantes em análise de sistemas e desempenha um papel fundamental em diversas áreas da engenharia elétrica. Por definição, um sistema é estável se uma entrada finita resultar em uma saída finita. O exemplo abaixo ilustra o conceito de estabilidade. Se você der um peteleco na bolinha do sistema estável (o peteleco é a entrada), ela vai oscilar em torno de uma altura finita (a altura da bolinha é a saída). Mas se você der um peteleco na bolinha do sistema instável, por mais suave que seja o seu peteleco, a bolinha vai descer a rampa rumo ao infinito. Portanto no caso do sistema instável, uma entrada finita (o peteleco), resultou em uma saída infinita.

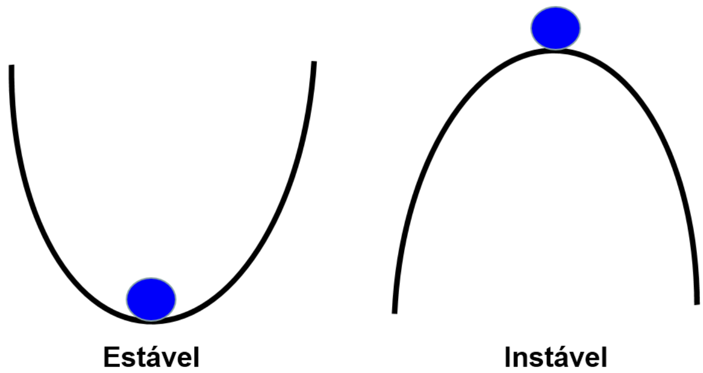


Figura 20

Uma entrada ou saída finita pode também ser chamada de limitada. Matematicamente, se a entrada $x[n]$ é finita (ou limitada), então existe um número positivo A tal que:

Equação 137

$$|x[n]| \leq A \quad para \quad todo \quad n$$

Esse é um jeito sofisticado de afirmar que o módulo de $x[n]$ não é infinito para nenhum n.

Se o sistema é estável, então uma entrada finita resulta em saída finita. Então, em termos matemáticos, um sistema será estável se, dada uma entrada finita, então existe um número positivo B tal que:

Equação 138

$$|y[n]| \leq B \quad para \quad todo \quad n$$

Exemplo de sistema estável: $y[n] = |x[n]|^2$

Exemplo de sistema instável: $y[n] = log_{10}(x[n])$

Note que o sistema acima é instável porque se, para algum n $x[n]$ for igual à 0, então a saída será infinita.

Voltaremos a falar de estabilidade no capítulo 7.

6.4 Sistemas invariantes no tempo

Um sistema discreto é invariante no tempo se a seguinte propriedade for satisfeita para qualquer entrada $x[n]$:

Equação 139

$$T\{x[n-n_d]\} = x[n-n_d]$$

Onde $y[n]$ é a saída do sistema para a entrada $x[n]$. Essa propriedade também é praticamente idêntica à sua versão contínua.

6.5 Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LTI)

Analogamente à sistemas LTI contínuos, sistemas LTI discretos formam a principal classe de interesse no estudo de sistemas discretos. E as razões para isso são as mesmas: além do fato de que vários sistemas físicos serem LTI, essa classe de sistema é de fácil manipulação porque toda a informação do sistema está contida na resposta ao impulso. Basta saber qual é a resposta ao impulso do sistema, que você sabe tudo do sistema. É esta propriedade que vamos explicitar aqui para o caso de sistemas discretos, mas a dedução é bem similar ao tempo contínuo, como visto no capítulo 2.

Antes de começar a dedução, temos que definir a função impulso no domínio discreto. Sua definição é:

Equação 140

$$\delta[n] = 1 \quad para \quad n = 0$$
$$\delta[n] = 0 \quad para \quad n \neq 0$$

Então o impulso é igual à 1 quando $n = 0$ e 0 para todos os outros valores de n.

Dada a definição da função impulso discreta, é óbvio que podemos representar um sinal $x[n]$ qualquer como uma soma de funções impulsos:

Equação 141

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Note que a soma é efetuada em k, que serve como índice. Portanto, $x[k]$ deve ser interpretado como sendo um coeficiente da função $\delta[n\text{-}k]$. Compare a **Equação *141*** com a sua contraparte contínua (**Equação *14***): n desempenha o papel de t e k desempenha o papel de t_0.

Se você está confuso em relação à **Equação *141***, substitua valores. Por exemplo, se n = 3, então temos $\delta[3\text{-}k]$ na soma em k. Isso significa que todos os valores de $\delta[3\text{-}k]$ serão zero, com exceção do termo com $k = 3$, que será 1. Então a soma com n = 3 ser reduz ao termo com $k = 3$, ou seja, a soma resulta em $x[n=3] = x[k=3]\delta[0] = x[k=3]$. Ou seja: $x[3] = x[3]$ (ainda bem).

É muito importante entender que na representação de $x[n]$ como somatório de funções impulsos, quem passa a ser função de n é apenas a função impulso, enquanto k é somente um índice. Se você ainda não entendeu isso, vou colocar alguns termos da soma explicitamente abaixo (não posso por todos porque a soma é infinita, o que me tomaria muito tempo):

Equação 142

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = \ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \ldots$$

Nessa forma fica explicito que cada $x[k]$ é somente um coeficiente (um número) da função $\delta[n\text{-}k]$. Por exemplo, se x[1] = 2.5, então a função $\delta[n\text{-}1]$ aparece multiplicada pelo coeficiente (o número) 2.5. É importante entender isso porque o sistema linear irá atuar somente nas funções $\delta[n\text{-}k]$. Por exemplo, suponha que um sistema LINEAR $T\{\}$ opere em $x[n]$. A forma da **Equação *141*** nos permite representar a saída de $y[n] = T\{x[n]\}$ em termos das respostas $T\{\delta[n\text{-}k]\}$.

Equação 143

$$T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

Note que a primeira igualdade da **Equação *143*** vale para qualquer sistema, mas a segunda e terceira igualdades só valem para sistemas Lineares.

Mas, se o sistema também for invariante no tempo, então é verdade que:

Equação 144

$$T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$$
$$onde$$
$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

Onde $h[n]$ é a resposta ao impulso do sistema (já que é a saída do sistema quando a entrada é o impulso). Ressaltando: a **Equação *144*** só vale para sistemas invariantes no tempo. Se o sistema for tanto linear quanto invariante no tempo, ou seja, se o sistema for LTI, então tanto a **Equação *143*** quanto a **Equação *144*** são verdades. Portanto:

Equação 145

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

Onde * representa a operação de convolução linear. A **Equação *145*** nos diz que a resposta para qualquer entrada $x[n]$ de um sistema LTI é determinada pela convolução entre a entrada e a resposta ao impulso. Portanto, se você sabe qual é a resposta ao impulso do sistema, você sabe tudo o que você precisa saber.

Uma outra forma de expressar a resposta ao impulso é colocar no domínio da frequência. Para isso, basta aplicar a DTFT em ambos os lados da **Equação *145*** e utilizar a propriedade da convolução da DTFT (**Equação *88***):

Equação 146

$$Y(v) = X(v)H(v)$$

Onde a $Y(v)$, $X(v)$ e $H(v)$ são as DTFTs de $y[n]$, $x[n]$ e $h[n]$, respectivamente. $H(v)$ é chamado de resposta em frequência do sistema LTI.

Note que eu usei a DTFT ao invés da DFT. Eu fiz isso porque na **Equação *145*** aparece a convolução linear e não a convolução circular. Pergunta: A **Equação *146*** também vale para a DFT? A resposta é depende: se você for esperto e utilizar uma janela computacional grande o suficiente para que a convolução circular da DFT corresponda à convolução linear, então a resposta é sim. Se você for meio bocó e não tomar cuidado com o tamanho da janela computacional, então a resposta é não.

7 – A transformada z

Prelúdio: sugestão para estudo

A não ser que em algum tópico especifico a própria nota de aula explicite o contrário, é sugerido que o aluno primeiro leia estas notas antes de estudar a bibliografia (veja a seção 7.7). A maior parte da teoria necessária está contida nas notas. Entretanto, particularmente a parte de propriedades da transformada z (seção 10.5 da bibliografia), é deixada como exercício.

7.1 – Motivação: estabilidade em sistemas LTI

A transformada z é o análogo no tempo discreto da transformada de Laplace no tempo contínuo. Por isso, em princípio, poderíamos dizer que a motivação para a existência da transformada z é a mesma motivação para a existência da transformada de Laplace (ou vice-versa, tanto faz). Entretanto, como nem sempre é garantido que o aluno saiba o porquê da transformada de Laplace existir, dedicarei essa parte à motivação para a transformada z (e, de quebra, para a transformada de Laplace também, já que as motivações são análogas).

A motivação da transformada z está intimamente ligada à noção de estabilidade. Como foi visto no capítulo anterior, um sistema é estável se, para qualquer entrada finita, a saída também for finita. No caso particular de um sistema Linear Invariante no Tempo (LTI), vimos que toda a informação do comportamento do sistema está contida na resposta ao impulso do sistema (ou na sua transformada de Fourier, que é a resposta em frequência). Dessa forma, deve ser possível detectar se um sistema LTI é estável ou instável conhecendo apenas a sua resposta ao impulso. Para estudar estabilidade em sistemas LTI, podemos começar pela própria definição de estabilidade: se $x[n]$ for um sinal finito (ou limitado), então existe um número positivo A, diferente de infinito, que satisfaz a condição:

Equação 147

$$|x[n]| \leq A \quad para\ qualquer\ n$$

De acordo com o critério de estabilidade, um sistema será estável se, para uma entrada finita $x[n]$, a saída $y[n]$ também for finita. Neste caso, haverá um número inteiro positivo B que satisfaz a condição:

Equação 148

$$|y[n]| \leq B \quad para\ qualquer\ n$$

Para sistemas LTI, podemos utilizar o fato de que a saída do sistema equivale à convolução da entrada com a resposta ao impulso $h[n]$ para re-expressar a **Equação *148*** em termos de $h[n]$. Assim teremos uma expressão para o critério de estabilidade em termos de $h[n]$. Substituindo então $y[n]$ pela convolução entre entrada e resposta ao impulso na **Equação *148*** teremos:

Equação 149

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]\square[m] \right| \leq B \quad para\ qualquer\ n$$

(Repare na **Equação *149*** que o somatório é em m). Sabemos que o módulo de uma soma é sempre menor ou igual à soma dos módulos (por exemplo, se temos -3 e 2, o módulo da soma é 1, enquanto a soma dos módulos é 5; para o caso de 3 e 2, ambos são 5; note que esta relação também é válida para números complexos: somar o módulo de dois números complexos equivale à somar dois fasores em fase, portanto se eles estiverem realmente em fase, a soma dos módulos será igual ao módulo da soma, enquanto se eles tiverem defasados a soma dos módulos será maior que o módulo da soma). Matematicamente, o fato de que o módulo da soma é sempre menor ou igual à soma dos módulos é expresso pela relação:

Equação 150

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]\square[m]\right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[n-m]\square[m]|$$

Mas também é verdade que o módulo da multiplicação é igual à multiplicação dos módulos (teste você mesmo(a): multiplique dois números complexos e calcule o módulo, depois calcule a multiplicação dos módulos e compare), ou seja:

Equação 151

$$|x[n-m]\square[m]| = |x[n-m]||\square[m]|$$

Portanto

Equação 152

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]\square[m]\right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[n-m]||\square[m]|$$

Mas estamos supondo que a entrada é finita, o que implica que o maior valor que o módulo de $x[n]$ pode adquirir é A. Consequentemente, também é verdade que:

Equação 153

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[n-m]||\square[m]| \leq A \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\square[m]|$$

A **Equação *152*** e a **Equação *153*** juntas implicam que:

Equação 154

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]\square[m]\right| \leq A \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\square[m]|$$

Note que o lado esquerdo da **Equação *154*** é idêntico ao lado esquerdo da **Equação *149***. Mas vamos recapitular: a **Equação *149*** nos diz que, para o sistema ser estável, a soma que aparece no lado esquerdo da **Equação *149*** (e da **Equação *154***) tem que ser limitada, ou seja, deve haver um valor *B* diferente de infinito tal que esta soma seja menor ou igual à *B*. Isso é o que a **Equação *149*** afirma. E o que a **Equação *154*** afirma? A **Equação *154*** afirma que esta soma é menor ou igual ao número *A* (que é diferente de infinito) vezes a soma dos módulos de $h[m]$. Portanto, se a soma dos módulos de $h[m]$ for finita, então a condição expressa pela **Equação *149*** será satisfeita, já que teremos:

Equação 155

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]\right| \leq AS$$

Onde chamamos a soma dos módulos de $h[m]$ de *S*:

Equação 156

$$S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]|$$

Resumindo: já que *B* = *AS*, e *A* é finito, para que *B* seja finito, *S* tem que ser finito. Mas dizer que *S* é finito equivale a dizer que a sequência $h[n]$ converge (ou $h[m]$, tanto faz já que estamos somando tudo*).* **Portanto, se a resposta ao impulso for uma sequência de números que converge, então o sistema será estável**.

E qual a relação da convergência de $h[n]$ com a sua Transformada de Fourier para Sinais Discretos (DTFT)? Simples: se a sequência de $h[n]$ converge, então a DTFT de $h[n]$ existe. Dizer que a DTFT existe equivale a dizer que a DTFT de $h[n]$ não é infinita. Para provar que a DTFT existe (não é infinita) se, e somente se, a sequência $h[n]$ convergir, basta escrever explicitamente a DTFT de $h[n]$:

Equação 157

$$H(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, exp(-j \cdot 2\pi \cdot v \cdot n)$$

Queremos saber se o módulo de $H(v)$ é finito. Mas o módulo de $H(v)$ é o módulo da soma na **Equação *157***, que sabemos que é igual ou menor à soma dos módulos:

Equação 158

$$|H(v)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, exp(-j \cdot 2\pi \cdot v \cdot n) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]\, exp(-j \cdot 2\pi \cdot v \cdot n)|$$

Mas a exponencial complexa não altera o módulo de $h[n]$, apenas a fase, ou seja:

Equação 159

$$|h[n]\, exp(-j \cdot 2\pi \cdot v \cdot n)| = |h[n]|$$

Portanto:

Equação 160

$$|H(v)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

A **Equação *160*** afirma que se a sequência $h[n]$ convergir, então $H(v)$ será menor que infinito, ou seja, a DTFT de $h[n]$ existe. Assim, podemos afirmar que***: um sistema LTI é estável se, e somente se, a DTFT da resposta ao impulso existe (é finita)***.

Esse resultado é extremamente útil, mas leva à seguinte pergunta: como achar a resposta em frequência de um sistema LTI instável? Já sabemos que não podemos simplesmente calcular a DTFT da resposta ao impulso, porque a DTFT é infinita para um sistema instável. É aí que entra a Transformada z. A transformada z nada mais é que uma versão modificada da DTFT para forçar a convergência da sequência. E a transformada z faz isso de maneira muito simples: ao invés de usar uma exponencial com módulo 1, como no caso da DTFT, a transformada z insere um módulo r na exponencial para forçar a convergência. Assim, o número z é definido como:

Equação 161

$$z = r\, exp(j \cdot \Omega)$$

Onde $\Omega = 2\pi v$ e r é um número real e coincide com o módulo de z. E a transformada z é definida como:

Equação 162

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Colocando o módulo e fase de z explicitamente na **Equação *162*** teremos:

Equação 163

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] r^{-n}\, exp(-j\Omega n)$$

Comparando a transformada z (**Equação *162*** ou ***Equação 163***) com a DTFT (**Equação *157***) vemos que, enquanto a DTFT não altera o módulo da soma, a transformada z altera, pelo fato de que z é um número complexo com módulo r. Assim, mesmo se a sequência $h[n]$ divergir, a sequência $h[n]z^{-n}$ poderá convergir, dependendo do valor de r. As condições de convergência serão estudadas com mais detalhe na seção seguinte. Antes, algumas palavras sobre a correta interpretação da transformada z (**Equação *162***) podem ser úteis.

Em primeiro lugar, note que apesar da **Equação *162*** ter sido motivada no contexto da resposta ao impulso, ela é válida para qualquer sequência de números, ou seja, $h[n]$ pode ser qualquer coisa, pode ser o sinal de entrada, pode ser a resposta ao impulso, pode ser uma saída qualquer.

Em segundo lugar, compare a **Equação *162*** (ou ***Equação 163***) com a DTFT (**Equação *157***). Na DTFT, v aparece como parâmetro fixo na soma, enquanto na **Equação *162*** z aparece como parâmetro fixo. Como visto na primeira parte do curso, o que a operação da **Equação *157*** te diz é: para encontrar o valor da DTFT para uma certa frequência v, faça a soma da **Equação *157***. E chamamos de espectro DTFT o conjunto $H(v)$ obtido para uma região de v, que a princípio vai de menos infinito a mais infinito (mas que como sabemos que é periódico com período 1, basta saber o primeiro período para termos todas as informações). Analogamente, o que a **Equação *162*** te diz é: para encontrar o valor da transformada z para um certo número complexo z, faça a soma da **Equação *162***. E qual é a região de z que devemos cobrir? A princípio todo o plano complexo. Este plano complexo é representado graficamente do mesmo jeito que representamos fasores (afinal de contas, z pode ser interpretado como sendo um fasor): a parte real no eixo x e a parte imaginária no eixo y, como mostrado na **Figura *21***.

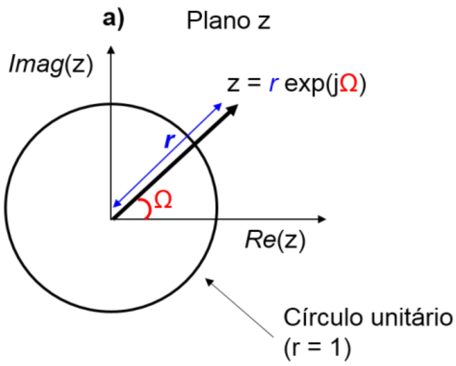


Figura 21 Plano complexo z

Note que, se r = 1, então a transformada z coincide com a DTFT. Este é um fato de suma importância: a DTFT coincide com a transformada z para valores de z em cima do círculo de raio r = 1, representado no plano da Figura 1. Esse círculo é chamado de círculo unitário. Como pela definição do número complexo z (**Equação *161***) a frequência aparece como o argumento de z, diferentes frequências da DTFT corresponderão à diferentes ângulos de z no círculo com raio r = 1, como também representado na Figura 1 (note que, consequentemente, a DFT corresponde a amostras da transformada z em cima do círculo unitário - pergunta: com qual espaçamento angular?). Essa é uma representação muito conveniente, pois ela explicita o fato de que tanto a DTFT como a transformada z são periódicas (lembre-se que um período da DTFT é v = 1 ou, equivalentemente $\Omega = 2\pi$). De fato, as transformadas z para dois fasores z's defasados de 2π são idênticas. A prova dessa propriedade é muito simples: suponha um determinado número complexo z_0. De acordo com a **Equação *162***, a sua transformada em z_0 será

Equação 164

$$H(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \square[n] z_0^{-n}$$

Agora suponha um segundo número complexo z_1 tal que:

Equação 165

$$z_1 = z_0\, exp(j2\pi)$$

A transformada em z_1 será

Equação 166

$$H(z_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \square[n] z_1^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \square[n] z_0^{-n}\, exp(-j2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \square[n] z_0^{-n} = H(z_0)$$

O fato de que a DTFT (e consequentemente a transformada z) é a mesma para duas frequências espaçadas de 2π foi o que motivou a definição do número complexo (ou fasor) z como na **Equação *161***: quando colocamos a frequência como argumento do fasor z, um deslocamento de 2π em frequência passou a corresponder a uma volta completa no plano complexo z com *r* fixo, ou seja, voltamos para o mesmo lugar no plano complexo. Vamos usar o z_0 e z_1 da **Equação *165*** como exemplo. Estes dois fasores estão no mesmo ponto do plano complexo z, já que z_1 é obtido partindo de z_0 e dando uma volta completa no círculo de raio r_0 (onde r_0 é o módulo de z_0). Ao mesmo tempo, pela definição da **Equação *161*** e pela relação da **Equação *165***, sabemos que a frequência associada ao número complexo z_1 é igual à frequência associada ao número complexo z_0 mais 2π (matematicamente, chamando a primeira de Ω_1 e a segunda de Ω_0, temos que a **Equação *161*** combinada com a **Equação *165*** implica que $\Omega_1 = \Omega_0 + 2\pi$). Essa característica, que dois z's com frequências deslocadas de 2π caem no mesmo ponto no plano complexo, só faz sentido porque a transformada z é invariante para um deslocamento em frequência de 2π (**Equação *166***). De fato, como a transformada z é invariante, podemos associar um único ponto no plano complexo z (não importando quantas voltas demos para chegar nesse ponto) com um único valor da transformada z

Para apreciar melhor o que foi dito no parágrafo anterior, compare a definição do número z (**Equação *161***) com a definição do número s da transformada de Laplace ($s = \sigma + j\omega$). Sabemos que a transformada de Laplace não é periódica, então não faria sentido definir a frequência como argumento de s (como foi feito para z), já que se tivéssemos definido s como definimos z, então um deslocamento de 2π no plano s resultaria no mesmo ponto no plano s. Mas como as transformadas de Laplace para duas frequências espaçadas de 2π não são iguais, teríamos que o mesmo ponto no plano complexo s teria valores diferentes de transformada de Laplace (dependendo de quantas voltas foram dadas para chegar no ponto), o que seria estúpido e inconveniente. Por isso é que o número *s* não é definido do mesmo jeito que o número z. De fato, enquanto que para o número z a frequência aparece como fase, para o número *s* a frequência aparece simplesmente como a parte imaginária. Portanto um deslocamento de 2π em frequência no plano *s* corresponde simplesmente à um deslocamento vertical, caindo em um outro ponto do plano *s*. Resumindo: colocamos a frequência como argumento de z para que um deslocamento em frequência de 2π resulte no mesmo ponto no plano z, e fizemos isso porque sabemos que a transformada z é invariante para um deslocamento em frequência de 2π. Por outro lado, definimos o número *s* de maneira que um deslocamento em frequência resulte em um deslocamento vertical no plano s, porque sabemos que a transformada de Laplace não é periódica e, portanto, não faria sentido que um deslocamento em frequência caísse em um mesmo ponto no plano s. Essa é a principal diferença entre a transformada de Laplace e a transformada z

7.2 Regiões de Convergência da Transformada z

Voltemos agora para o problema que motivou a definição da transformada z. Como indicado no parágrafo anterior, sequencias que divergem não possuem DTFT mas, dependendo do valor de *r*, podem possuir transformada z. Assim, uma noção de suma importância para a transformada z é a noção de região de convergência: se um sinal diverge, haverá regiões no plano z para o qual a transformada z existe e regiões para as quais a transformada z não existe (é infinita). A região onde z existe é chamada de região de convergência. Claro que a região de convergência depende do sinal para o qual estamos aplicando a transformada z, mas uma propriedade geral muito importante da região de convergência já pode ser inferida imediatamente. Como quem determina se a transformada z vai convergir ou não é o valor de *r*, ou seja, o módulo de z, então a região de convergência será sempre um disco centrado em zero: como vamos ver a seguir, o disco pode ser furado no meio, pode ser infinito e pode não ser, mas será sempre um disco, pois valores de z com o mesmo *r* (mesmo raio) possuem a mesma propriedade de convergência.

Agora queremos estudar as propriedades de convergência da transformada z. Em outras palavras, queremos deduzir coisas gerais, que apliquem a todos os sinais, ou pelo menos à uma vasta classe de sinais, para que tenhamos informações úteis. Toda vez que queremos deduzir propriedades gerais de sistemas lineares (ou, matematicamente, equações), escolhemos funções que sejam simples e que possam servir como base para outras funções. É exatamente isso que fazemos com a resposta em frequência: determinamos como o sistema se comporta para entradas senoidais. Escolhemos estudar senoides por duas razões: porque uma classe enorme de funções pode ser decomposta em senoides, e porque o comportamento do sistema para senoides é simples: se o sistema for linear é garantido que a saída é outra senoide. Mas, no caso da Transformada z, em particular, estamos exatamente interessados em sistemas ou sinais que podem divergir. Se o sinal ou o sistema diverge, então ele não admite transformada de Fourier e, portanto, não podemos os decompor em senoides. Por isso, não faz muito sentido escolher senoides como as funções bases para o nosso estudo (na verdade, já fizemos isso quando estudamos resposta em frequência no contexto da DTFT).

Nossa primeira tarefa é então escolher uma classe de funções que seja útil e simples. Como nosso foco aqui é estudar as propriedades de convergência, seria útil escolher uma classe de sinais que poderíamos determinar se convergem ou não imediatamente. As sequencias mais simples de se determinar a convergência são as sequencias do tipo:

Equação 167

$$x[n] = a^n u[n]$$

E

Equação 168

$$y[n] = b^n u[-n]$$

onde a e b são números complexos e $u[n]$ é a função *step*:

Equação 169

$$u[n] = 1 \quad para \quad n \geq 0$$
$$u[n] = 0 \quad para \quad n < 0$$

Note que uma sequência qualquer que multiplica a função *step* $u[n]$ só terá valores diferente de zero para $n \geq 0$. Sequencias deste tipo são chamadas em inglês de *right-sided sequencies*. Algo como sequencias do lado direito. Analogamente, uma sequência qualquer multiplicada por $u[-n]$ será diferente de zero apenas para $n \leq 0$. Sequencias desse tipo são chamadas em inglês de *left-sided sequencies*, ou sequencias do lado esquerdo, em uma tradução livre. Note que uma sequência do lado direito (ou lado esquerdo) poderá também ser obtida multiplicando uma sequência qualquer pela função *step* deslocada no tempo. Em outras palavras, mesmo uma sequência do lado direito poderá conter valores de n negativos (por exemplo, se u[n] for substituído por u[n+3] na Equação 21, então $x[n]$ terá valores diferentes de zero para n = -1, n = -2 e n = -3). *Porém, uma sequência do lado direito poderá apenas ter um número finito de n's negativos, enquanto uma sequência do lado esquerdo poderá apenas ter um número finito de n's positivos*.

Podemos identificar dois somatórios que servirão de base para a análise seguinte:

Equação 170

$$S1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

Ou

Equação 171

$$S2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n u[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} b^n = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n$$

Obviamente, a soma da **Equação *170*** só converge se $|a^n|$ for para zero à medida que n vai para infinito. Consequentemente, a soma irá convergir se $|a| < 1$ e irá divergir caso contrário. Pelas mesmas razões, a soma da **Equação *171*** irá convergir se $|b| > 1$ e irá divergir caso contrário. Portanto é muito fácil identificar as condições para as quais uma sequência do tipo $x[n]$ como na **Equação *167*** e $y[n]$ como na **Equação *168*** convergem ou não: **basta ver se os módulos de *a* ou *b* são maiores ou menores que 1**.

Além da simplicidade em determinar se as somas convergem ou não, as sequencias das **Equação *167*** e **Equação *168*** são bem úteis, pois uma classe enorme de funções pode ser decomposta em funções exponenciais, com diferentes valores de a e b e, possivelmente, com as funções *step* deslocadas no tempo. Por essas razões, focaremos nosso estudo em sequencias como das **Equação *167*** e **Equação *168***, ou variações das mesmas (como funções que combinam duas ou mais sequências exponenciais ou funções com a função *step* deslocada no tempo). Lembrando que, como mostrado na seção anterior, se a soma da **Equação *170*** divergir, então $x[n]$ não terá DTFT. Analogamente, se a soma da **Equação *171*** divergir, então $y[n]$ não terá DTFT.

Já identificamos as condições para as quais as duas sequências $x[n]$ e $y[n]$ convergem. Será bem útil já determinarmos também o valor do somatório no caso de haver convergência. O procedimento é bem simples e será mostrado para a soma da **Equação *170***. Tente fazer sozinho para a soma da **Equação *171***.

O procedimento é baseado no bom e velho truque de deslocar a soma para podermos subtrair a soma não deslocada da soma deslocada. Para deslocar a soma, basta multiplicar ambos os lados da **Equação *170*** por a:

Equação 172

$$a \cdot S1 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n}$$

Como $S1 - aS1 = S1(1 - a)$, concluímos pela **Equação *172*** que:

Equação 173

$$S1 = \frac{1}{1-a} \quad se \quad |a| < 1$$

Na **Equação *173*** colocamos a condição de convergência explicitamente para não esquecermos que, se o módulo de a for maior ou igual a 1, então o resultado da soma é infinito.

O procedimento para determinar o valor da soma da **Equação *171*** é o mesmo: desloca e subtrai. Faça você mesmo(a) o procedimento. O resultado é:

Equação 174

$$S2 = \frac{1}{1 - {}^{1}/_{b}} \quad se \quad |b| > 1$$

Agora está muito fácil de determinar a transformada z e a região de convergência para as sequencias $x[n]$ e $y[n]$ (**Equação *167*** e **Equação *168***). Por definição, a transformada z de $x[n]$ é:

Equação 175

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Substituindo $x[n]$ como na **Equação *167***:

Equação 176

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

Compare a soma da **Equação *176***, com a soma da **Equação *170***: elas são quase idênticas, a única diferença é que na **Equação *176*** o termo a/z desempenha o papel do termo a na soma da **Equação *170***. Portanto já sabemos que X(z) existe (não é infinito) se $|a/z| \leq 1$. Como o módulo de z é r, essa condição de convergência é equivalente à condição $r>|a|$. Portanto a região de convergência nesse caso começa (mas não inclui) no círculo de raio $r = |a|$ e estende até o infinito. A **Figura *22*** ilustra a região de convergência para o caso de a ser real e menor que 1. Note que, como no exemplo da figura $|a| < 1$, então a região de convergência inclui o círculo unitário, ou seja, a região de convergência inclui a DTFT, o que significa que se $|a| < 1$ a sequência $x[n]$ admite DTFT, conclusão esta que já tínhamos chegado anteriormente (veja o texto abaixo da **Equação *171***).

Utilizando o resultado da **Equação *173***, temos que:

Equação 177

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \quad se \quad |z| > |a|$$

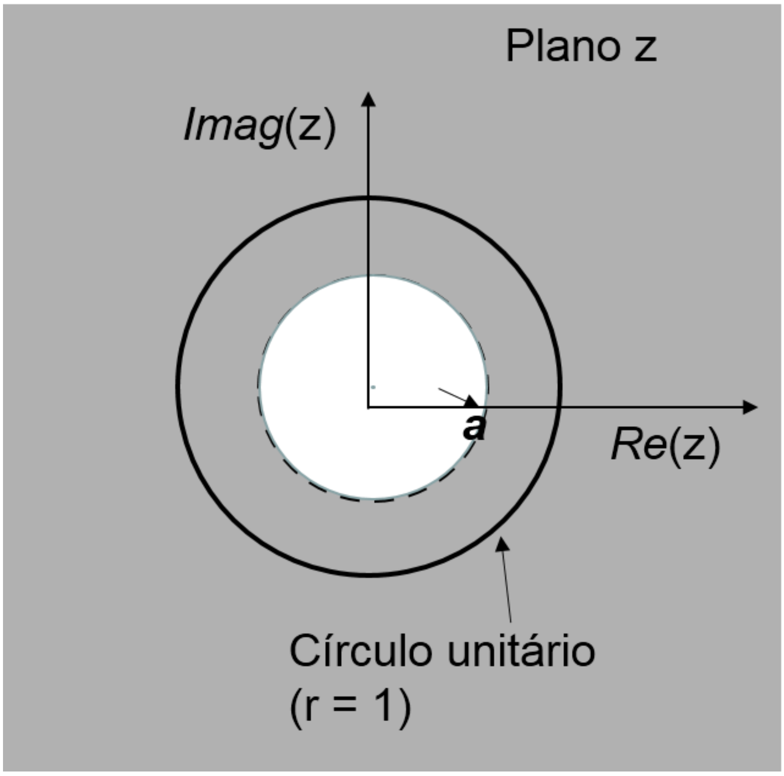


Figura 22 Região de Convergência da transformada z para a sequência $x[n]$ definida na Equação 167. A região de convergência começa (mas não inclui – essa exclusão é indicada pelo círculo pontilhado) no círculo de raio a e se estende ao infinito. Neste exemplo, foi suposto que a possui modulo menor que 1 o que inclui o cícurlo unitário (e, portanto, a DTFT) na região de convergência.

Repita o mesmo procedimento para provar que a transformada z da sequência $y[n]$ (**Equação *168***) resulta na seguinte transformada z:

Equação 178

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{b}} \quad se \quad |z| < |b|$$

Como já indicado pela **Equação *178***, a transformada z da sequência y$[n]$ só existe para valores de z cujo módulo é menor que b. Dessa forma, a região de convergência será um disco cheio que se estende de 0 até (mas não inclui) o círculo de raio b. Neste caso, para que a DTFT exista, é necessário que |*b*|>1. A figura abaixo ilustra a região de convergência para a sequência $y[n]$.

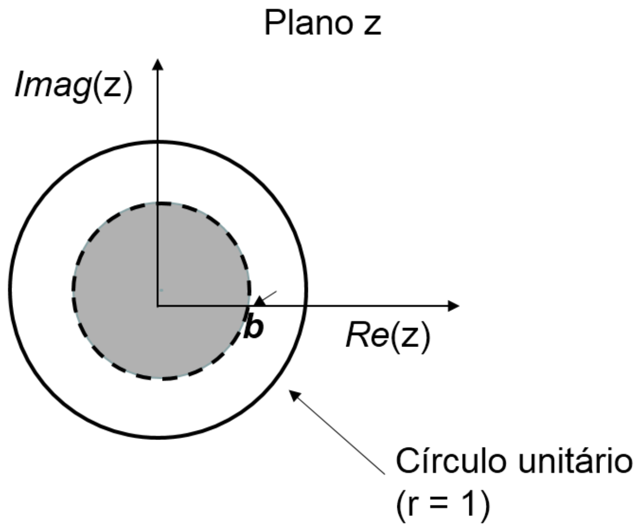


Figura *23* Região de Convergencia da transformada z para a sequência y[*n*] definida na Equação 168. A região de convergência começa em zero e termina no círculo de raio *b* (mas não o inclui). Neste exemplo, foi suposto que *b* possui modulo menor que 1 o que exclui a DTFT da região de convergência.

É importante notar que duas sequencias diferentes podem ter a mesma transformada z, porém com regiões de convergência diferentes. No exemplo 10.2 do Oppenheim (*Signals & Systems*), a transformada z da sequência $x[n] = -a^n u[-n-1]$ é calculada e o resultado é (faça sozinho(a) antes de ver a solução):

Equação 179

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \quad se \quad |z| < |a|$$

Comparando a **Equação *179*** com a **Equação *177***, vemos que as expressões para X(z) são idênticas, sendo que somente as regiões de convergência é que diferem. Portanto, é sempre necessário especificar a região de convergência da transformada z, senão não tem como reconstruir o sinal no tempo discreto.

Finalmente, suponha que um sinal consista da soma de duas sequencias diferentes. Por exemplo, suponha o seguinte sinal:

Equação 180

$$g[n] = a^n u[n] + b^n u[-n]$$

Obviamente, para que a transformada z de g[n] convirja, é necessário que tanto a transformada de $a^n u$[n] como a transformada de $b^n u$[-n] convirjam ***para um mesmo z***. Portanto, como a transformada z é uma operação linear, podemos utilizar os resultados da **Equação *177*** e **Equação *178*** para determinar a transformada de $g[n]$:

Equação 181

$$G(z) = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{b}} \quad para \quad |b| > z > |a|$$

Note que a região de convergência para $G(z)$ corresponde à região de convergência comum à duas sequências, ou seja, a região de convergência para G(z) é um disco com raio menor começando (mas não incluindo) no círculo de raio a e terminando (mas não incluindo) no círculo de raio b. É claro que, se $|a|>|b|$, então a região de convergência da transformada z de $g[n]$ será inexistente, ou seja, $g[n]$ não admitirá transformada z para nenhum valor de z. A figura abaixo ilustra a região de convergência da sequência $g[n]$ (supondo que $|b| > |a|$).

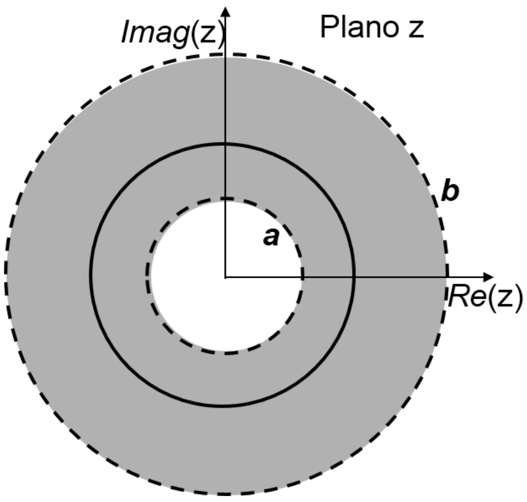


Figura 24 Região de convergência da trasnformada z da sequência g[n].

Os exemplos 10.3 e 10.4 do Oppenheim ilustram outros casos relevantes. Faça-os antes de ver a solução.

7.3 – Zeros, Pólos e Transformada z inversa.

O exemplo 10.3 do Oppenheim considera a seguinte sequência:

Equação 182

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$

Você já deve ser capaz de identificar imediatamente que a região de convergência desta sequência é um disco começando (mas não incluindo) em |z|=0.5 e estendendo até o infinito. Você também já deve ser capaz de identificar imediatamente que a expressão para a transformada z dentro da região de convergência é:

Equação 183

$$X(z) = \frac{7}{1-\left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}} - \frac{6}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}}$$

Podemos rearranjar a equação acima como uma razão de polinômios em z^{-1}:

Equação 184

$$X(z) = \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-\prime 1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-\prime 1}\right)}$$

Ou como uma razão de polinômios em z:

Equação 185

$$X(z) = \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

Quando X(z) pode ser escrito como uma razão entre polinômios (como no caso da **Equação *175*** ou **Equação *185***), dizemos que X(z) é racional. Neste caso, chamamos de zeros de X(z) os pontos que zeram o numerador. No exemplo da **Equação *184*** ou **Equação *185***, temos dois zeros: z = 0 e z = 3/2. Os pólos, por outro lado, são os pontos que zeram o denominador. No exemplo da **Equação *184*** ou **Equação *185***, temos dois pólos: z = 1/3 e z = 1/2.

Se a transformada z for racional, então sempre será possível decompor X(z) como soma de termos mais simples, em geral com um único pólo, para identificar o sinal original. Por exemplo, se X(z) da **Equação *184*** ou **Equação *185*** for dado, podemos o decompor para deixar na forma da **Equação *183*** e, junto com a informação sobre a região de convergência, identificar o sinal original por inspeção. Essa é uma maneira de calcular a transformada z inversa. Note que, se a região de convergência incluir o círculo de raio unitário, então podemos recuperar o sinal original simplesmente pegando a transformada z no círculo unitário e calculando a DTFT inversa. De maneira geral, a transformada inversa pode ser obtida através de uma integral fechada no plano complexo, mas esse método está fora do escopo deste texto

Transformadas z racionais são particularmente importantes. De fato, da mesma maneira que sistemas representados por equações diferenciais resultam em transformadas de Laplace racionais, sistemas representados por equações de diferença resultam em transformada z racionais. Para provar essa relação, primeiro devemos determinar qual é a propriedade de deslocamento para a transformada z. O raciocínio é muito semelhante ao utilizado na DTFT e por isso é deixado como exercício. O resultado é que se $x[n]$ possui transformada X(z), então $x[n\text{-}n_0]$ terá transformada $z^{-n_0}X(z)$ (veja seção 10.5.2 do Oppenheim - a dedução é muito similar à da propriedade de deslocamento no tempo da DTFT). Portanto, um sistema caracterizado por uma função de diferença do tipo:

Equação 186

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x\,[n-k]$$

Resultará em uma função de transferência (definida como a razão entre Y(z) e X(z), tomando $x[n]$ como entrada e $y[n]$ como saída):

Equação 187

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Partindo da **Equação *186***, prove sozinho(a) a **Equação *187***. Se tiver dificuldades, estude a seção 10.7.3 do Oppenheim e tente novamente.

7.4 – Propriedades da região de convergência da transformada z

Estamos agora em condições de explicitar algumas informações muito úteis que podemos adquirir a respeito da região de convergência da transformada z. As propriedades seguem a mesma ordem da seção 10.2 do livro do Oppenheim e são, de fato, comentários sobre as propriedades. O leitor deve estudar a referida seção do Oppenheim após ou durante (melhor durante) o estudo desta seção 7.4 das notas de aula.

Propriedade 1: A região de convergência é um disco no plano z centrado na origem.

Essa propriedade é consequência direta do fato de que a convergência depende apenas do módulo de z, como discutido na seção 7.2.

Propriedade 2: A região de convergência não contém pólos

Óbvio, já que por definição um pólo é um ponto que zera o denominador de X(z), ou seja, X(z) em um pólo é infinito.

Propriedade 3: Se x[n] é de duração finita, então a região de convergência é todo o plano complexo, com exceção de z = 0 ou z = ∞.

Na verdade, esta propriedade está um pouco incompleta: faltou especificar que $x[n]$ deve também ser limitado. Mas se $x[n]$ for limitado e de duração finita, então obviamente $x[n]$ admite transformada z (inclusive admite a DTFT), porque cada transformada consistirá de uma soma finita de termos finitos (os termos serem finitos equivale a dizer que $x[n]$ é limitado – note a diferença entre o conceito de limitado e o conceito de duração finita). As exceções z = 0 ou z = ∞ são óbvias: se z = 0, então $r = 0$, e como r aparece como r^{-n} na soma, vai dar zebra para n positivo (ou seja, vai levar a soma para infinito); z = ∞, por outro lado, dá zebra pra n negativo.

Propriedade 4: se x[n] for uma sequência do lado direito, e se o círculo com $|z| = r_0$ *estiver na região de convergência, então todos os valores finitos de z para os quais* $|z| > r_0$ *também estarão na região de convergência.*

Vimos que sequencias do lado direito possuem região de convergência expandindo de um círculo centrado em 0 até o infinito. Portanto, se z_0 com módulo r_0 está na região de convergência, então qualquer z com módulo maior que r_0 também estará.

Propriedade 5: se x[n] for uma sequência do lado esquerdo, e se o círculo $|z|<r_0$ *estiver na região de convergência, então todos os valores de z com módulo entre 0 e* r_0 *também estará na região de convergência.*

A razão para esta propriedade é análoga à da Propriedade 4.

*Propriedade 6: se x[n] possuir dois lados (*ou seja, se $x[n]$ for a soma de uma sequência do lado esquerdo com uma sequência do lado direito*), e se o círculo de raio* $|z|= r_0$ *estiver na região de convergência, então a região de convergência será um anel (*como o da Figura 4*) que inclui* r_0.

Essa propriedade toca de roda para afirmar o que já sabemos: que se $x[n]$ possuir uma sequência do lado direito e uma sequência do lado esquerdo e, se existir uma região de convergência de $x[n]$ (lembre-se que no exemplo da **Figura *24*** só temos uma região de convergência se $|b|>|a|$), então, porque $x[n]$ deve convergir tanto para a sequência do lado esquerdo como para a sequência do lado direito, a região de convergência será um anel.

Propriedade 7: se a transformada X(z) de x[n] for racional, então a sua região de convergência é limitada por pólos ou se estende ao infinito.

Veja a **Equação *184*** ou **Equação *185*** (ou o exemplo 10.3 do Oppenheim). Como a sequência é do lado direito, a região de convergência estenderá de um círculo de raio 0.5 (que é o maior pólo) até o infinito. Se tivéssemos uma função do lado esquerdo, ela estenderia de 0 até o menor pólo. Se fosse uma combinação de sequencias do lado esquerdo com direito, ela estenderia do maior pólo da sequência do lado direito até o menor pólo da sequência do lado esquerdo (e seria um anel). Em todo caso, ou ela é limitada em um pólo ou ela vai para infinito.

Propriedade 8: Se a transformada X(z) de x[n] for racional e se x[n] for uma sequência do lado direito, então a região de convergência se estende do círculo de raio igual ao maior pólo de X(z) até o infinito. Além disso, se x[n] = 0 para n < 0, então a região de convergência inclui o infinito.

A primeira parte da propriedade 8 já foi explicada nas propriedades 4 e 7. A segunda parte é consequência do fato que r aparece na soma da transformada z como r^{-n}. Mas se $x[n] = 0$ para n negativo, então a soma vai de $n = 0$ até $n = \infty$. Neste caso, quando r vai para infinito, todos estes termos vão para zero (com exceção de $n = 0$). Portanto a transformada z da função convergirá mesmo para r indo para infinito.

Propriedade 9: Se a transformada X(z) de x[n] for racional e se x[n] for uma sequência do lado esquerdo, então a região de convergência se estende do círculo de raio igual ao menor pólo de X(z) até z = 0. Além disso, se x[n] = 0 para n > 0, então a região de convergência inclui o ponto z = 0.

A razão para essa propriedade é análoga à da Propriedade 8.

7.5 – Causalidade e Estabilidade

Causalidade e Estabilidade são duas propriedades importantíssimas de sistemas. Por isso, dediquei uma pequena seção apenas para explicitar a relação entre causalidade e estabilidade em sistemas LTI e a transformada z.

Um sistema causal é um sistema cuja resposta só depende da entrada presente ou passada, mas nunca da futura. Se um sistema for LTI, então a saída $y[n]$ é dada pela convolução entre a entrada $x[n]$ e a resposta ao impulso $h[n]$:

Equação 188

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Mas, se o sistema é causal, então a entrada em $y[n]$ depende somente de $x[k]$ para $k \leq n$. Isso significa que, para um sistema causal, a soma na **Equação *188*** deve terminar em $k = n$. Mas $x[k]$ é uma entrada qualquer, portanto $x[k]$ pode ou não pode ser zero para $k > n$. Portanto, a soma na **Equação *188*** só terminará em $k = n$, independentemente da entrada, se e somente se *h*[n] = 0 para n < 0 (note que, na **Equação *188***, o argumento de *h* fica negativo quando *k* passa a ser maior que *n*). ***Conclusão: em um sistema LTI causal, h[n] = 0 para n < 0***. E o que isso tem a ver com a transformada z? Oras, ***se o sistema for causal***, então, de acordo com a propriedade 8, ***a região de convergência da função de transferência*** (que é o nome de *H*(*z*), ou seja, função de transferência é a transformada z da resposta ao impulso) ***do sistema é o exterior de um círculo e inclui o infinito***. Você bate o olho na transformada z de *h*[*n*] e já sabe se o sistema é causal ou não. Estude a seção 10.7.1 do livro do Oppenheim para fixar bem essa noção.

Em relação à estabilidade, nós meio que já sabemos o que esperar: nós já sabemos que um sistema será estável se a resposta ao impulso admitir DTFT (seção 7.1 destas notas de aula). Isso equivale a dizer que a região de convergência da transformada z da resposta ao impulso (ou seja, a função de transferência) inclui o círculo unitário, pois o círculo unitário coincide com a DTFT. ***Portanto um sistema LTI será estável se e somente a região de convegência de H(z)*** (onde H(z) é a função de transferência) ***incluir o círculo unitário***. Estude a seção 10.7.2 do livro do Oppenheim para fixar bem essa noção.

7.6 – Lista de Exercícios

1 – Resolva os exemplos 10.1 até 10.8

2 – Prove as propriedades de linearidade (seção 10.5.1), deslocamento no tempo (10.5.2), convolução (10.5.7) e o teorema do valor inicial (10.5.9).

3 – Resolva os exemplos 10.21 a 10.27.

7.7 – Bibliografia:

Oppenheim, Signals and Systems, Second Edition, Capítulo 10 seções:

10.0, 10.1, 10.2, 10.5, 10.6 e 10.7

Apêndice

Prova da igualdade $\delta(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i 2\pi v n)$.

Em primeiro lugar, essa igualdade não está estritamente correta. Na verdade, a soma não é igual à função impulso, e sim igual à um trem de impulsos, onde cada impulso está localizado em um ponto correspondendo à *v* igual a um número inteiro. Entretanto essa expressão geralmente aparece em integrais envolvendo apenas o primeiro período (-0.5 < v < 0.5), como é o caso da **Equação *96***. Por isso, podemos considerar apenas o primeiro período, o que efetivamente restringe a soma à função impulso. Além disso, se você entender a prova dessa igualdade restringindo v ao primeiro período, fica fácil de estender a prova para v qualquer. Tendo feita essas considerações, vamos focar nossa atenção no primeiro período (-0.5 < v < 0.5).

O que temos que fazer para provar que a soma é a função impulso? Um bom começo é lembrar que a função impulso é caracterizada pela seguinte relação:

A1

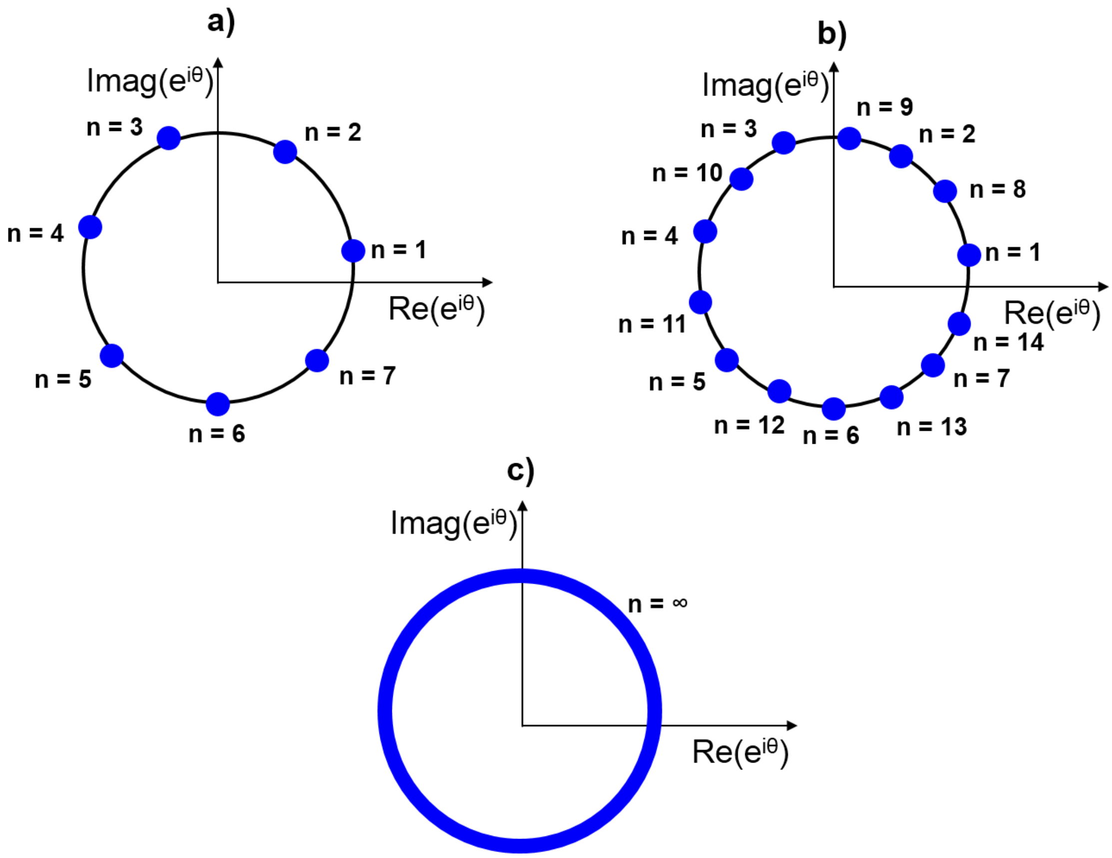
$$\int Y(v)\delta(v - v')dv = Y(v')$$

Então para provar que a soma é a função impulso, precisamos provar que a soma satisfaz essa condição. Antes de provarmos a relação **A1**, entretanto, vamos fazer uma rápida análise para ver se a soma tem "cara" de função impulso. Qual é a cara da função impulso? Ela é 0 para $v \neq 0$ e infinita para $v = 0$. A soma satisfaz essas duas condições? Para $v = 0$, teremos a seguinte soma:

A2

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(i2\pi 0 n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

Então, para $v = 0$, estaremos somando 1 infinitas vezes, o que resulta, é claro em infinito. Então para $v = 0$ a soma tem mesmo cara de função impulso. E para $v \neq 0$? Nesse caso, teremos uma soma de infinitas exponencias, cada uma com um ângulo diferente. De fato, cada valor de n vai resultar em um ângulo diferente (isso só não é verdade se v for um número inteiro, o que resulta novamente nas exponencias sendo 1 e a soma sendo infinita – daí a soma ser na verdade um trem de impulsos). Se cada fasor tem um ângulo diferente e temos infinitos fasores, então para cada fasor sempre teremos um outro fasor defasado de 180 graus, o que resulta na soma infinita sendo 0. Não precisamos provar isso formalmente, mas a figura abaixo ajuda a entender esse fato intuitivamente.



Apendice 1 Representação no circulo unitário da soma para $v \neq 0$. a) soma até n = 7. b) soma até n = 14. c) soma até n = ∞. Quando n vai para infinito, todo o circulo unitário é preenchido, o que significa que a soma total será zero (já que a soma de cada par de fasor defasado de 180 graus é zero, a soma total é zero).

Então vimos que a soma realmente tem cara de função impulso: ela é zero para $v \neq 0$ e infinita para $v = 1$. Agora vamos ver se ela satisfaz a relação A1. Para testar se a soma satisfaz essa relação, vamos chamar a soma de $S(v)$, ou seja:

A3

$$S(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i\,2\pi v\,n)$$

Queremos provar que S(v) é a função impulso. Então vamos fazer a integral da relação **A1**, mas para S(v), ou seja:

$$\int Y(v) S(v - v')dv = ?$$

Temos que provar que o resultado dessa integral será $Y(v')$. Substituindo a soma na integral:

$$\int Y(v)S(v-v')dv = \int Y(v)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[i\,2\pi(v-v')n\right]dv$$

Invertendo a ordem das operações:

$$\int Y(v)S(v-v')dv = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int Y(v)\exp\left[i\,2\pi(v-v')n\right]dv = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\,2\pi v'n\right)\int Y(v)\exp\left(i\,2\pi vn\right)dv$$

Mas a última integral da expressão acima corresponde à DTFT inversa de *Y*(*v*). Portanto de *Y*(*v*) é a DTFT de *y*[n], então:

$$\int Y(v)S(v-v')dv = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\,2\pi v'n\right)\int Y(v)\exp\left(i\,2\pi vn\right)dv = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\,2\pi v'n\right)y[n]$$

Mas a soma da expressão acima corresponde à DTFT direta de *y[n*], avaliada na frequencia *v*´. Portanto:

$$\int Y(v)S(v-v')dv = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[-i\,2\pi v'n\right]y[n] = Y(v')$$

Pronto.